第一章 概 论

§1 引 言

世界充满着矛盾。例如，在社会活动中一部分人因为相似的利益而结盟，以便对抗另一部分人。这类对抗、竞争、冲突、联盟、合作、谈判现象引起了哲学家们的兴趣。毛泽东的经典著作《矛盾论》就深刻地阐述了矛盾的理论。但是能否用数学方法分析矛盾现象呢？

数学历史悠久，并且不断发展前进，被称为“科学的语言”。在20世纪前，它最有效的应用范围是天文、物理、力学等所谓精确的自然科学。由于概率论与统计理论的发展，数学又逐渐应用于生物科学与社会科学，而分析矛盾现象的数学方法和理论也是在这一背景下于本世纪初开始萌芽并逐步发展起来的，这个数学分枝称为对策论(Game Theory)。

数学研究的方法是从大量的同类现象中抽象出基本要素，进一步构造出能描述这类现象的模型。许多冲突模型在游戏中就存在，对策论早期就是由研究国际象棋开始的，所以被命名为Game Theory。人们很快认识到此种理论可用于经济、政治、军事等领域，所谓“世事纷争一棋局”，正说明其中一些道理。1944年冯·诺依曼(John, Von Neumann)和奥·摩根斯特恩(Osker Mor-gen-

VISIT…

LANZAROTE
Caliente.COM

stern)合著的《竞赛论与经济行为》(Theory of Games and Economic Behavior)问世，总结了初期研究成果，奠定了对策论的基础。由于该理论主要讨论在复杂的矛盾冲突等活动中，局中人(player)采取何种合理的策略(strategy)而能处于“优越”的地位，以便取得较好效益，所以将它译为对策论。

常见的游戏如棋类，两人对奕，此两人便称为局中人，他们各有一套棋路，或善于用马，或长于用炮。在每次轮到一方走子时，他可能有许多走法，这些走法依赖于当时棋局形势以及棋手想要达到的目的，以及他惯用的走法，从而形成他走棋的指导思想。对奕时指导棋手行动的思想便称为策略。对局终了可能有三种结局：甲胜；乙胜；和局。如果用数量表示各种结局，例如胜家赢得彩金若干(设所得彩金由输家付给，则输家当然失去若干)，和局时都不能取得彩金，此种表示结局的数称为支付(payoff)。局中人、策略、支付是对策论中常见的基本概念。

有些游戏中并无“机会”(chance)因素，而是全凭局中人的技艺。但某些游戏如“桥牌”、“打百分”等，“机会”却有较大作用，分发到游戏者手中的牌是随机的，它们情况要复杂一些。

游戏并非只有双方，可以有多方，如三人玩的跳棋便有三个局中人。一般只有两个局中人的称为两人博奕(或二人对策)，有 n 个局中人的称为 n 人对策。

§2 展开型对策

读者会注意到游戏中的局中人总是按游戏规则进行，他们的活动可用一种序列方式加以描述，这就导致建立展开型(Extensive form)模型，它是最早被研究的对象，现在举例说明。

例 1 猜币问题 甲、乙两局中人约定：各出伍分硬币一枚，

出示时将硬币放在桌面，并规定正、反面(如规定有国徽图案者为正，有币值一面为反)，约定两币面相同则乙胜，乙得一分，甲失一分，反之，两币面相异则甲胜，甲得一分，乙失一分。

此例可借助图形进行分析，图中 a 点表示起点，甲可选择

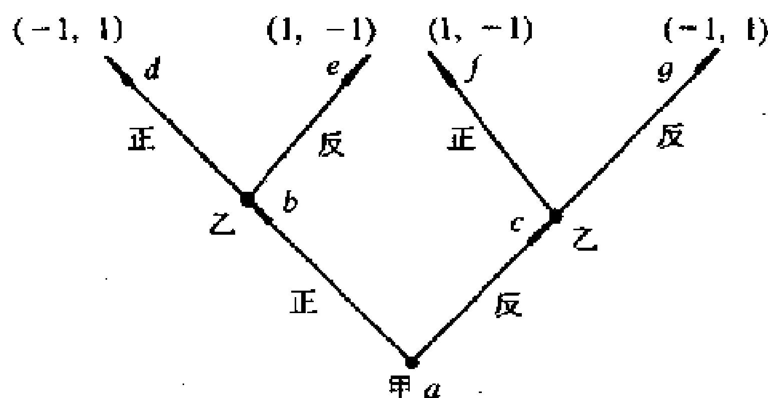


图 1.2.1

“正”或“反”，故在 a 处标以甲，并画两个分枝，一标以正，一标以反。因乙不知甲的选择，他也可选“正”或“反”。若甲选“正”，可在甲的正枝末端 b 处作为乙的起点作出两枝：一正一反，表示乙的可能选择。同样，若甲选“反”，便在甲的反枝末端 c 处作为乙的起点而作出正反两枝，形成图 1.2.1 的树形图。此类图称为对策树(Game tree)或拓朴树(topological tree)，树稍的末端标出表示两局中人所得的数字，第一个表示甲的所得，第二个表示乙的所得。

下面我们作一般的描述。为此给出如下诸定义。设 $\mathscr{X}$ 表示点的集合，其元素用 $x, y, \cdots$ 表示。在 $\mathscr{X}$ 上引进二元关系“$\succ$”，它具有传递与反对称(asymmetric)的关系。后者指 $x \succ y$ 与 $y \succ x$ 不可能同时成立。假如 1) $\mathscr{X}$ 是一个有限集；2) $\succ \subseteq \mathscr{X} \times \mathscr{X}$ 是定义在 $\mathscr{X}$ 上的二元关系，则称二元对($\mathscr{X}$, $\succ$)为一个图(graph)(这里的图不含平行枝或圈(loop))。直观地看，关系 $x \succ y$ 表示在 x 与 y 之间建立一种联接，如图中 a、b 之间有 $b \succ a$ 表示 a 在 b 之“前”，而 $d \succ b$ 表示 b 在 d 之“前”(或由 b 向 d 画一箭头)等等。

为说话方便计，引入以下三个集合：

$$E(\succ,\bar{x})=E(\bar{x})=\{x\in\mathscr{X}\mid x\sim\bar{x}\} \tag{1.2.1}$$

$$G(\succ,\bar{x})=G(\bar{x})=\{x\in\mathscr{X}\mid x\succ\bar{x}\} \tag{1.2.2}$$

$$F(\succ,\bar{x})=F(\bar{x})=\{x\in\mathscr{X}\mid \bar{x}\succ x\} \tag{1.2.3}$$

这里"$\sim$"表示"等价"关系。若把 $x\succ\bar{x}$ 理解为 x 在 $\bar{x}$ 之"后"，则 $G(\bar{x})$ 表示集 $\mathscr{X}$ 中在点 $\bar{x}$ 后的诸点 x 的集合。而 $F(\bar{x})$ 表示集 $\mathscr{X}$ 中在点 $\bar{x}$ 之前的诸点 x 的集合。此外再规定 $|F(\bar{x})|$ 表示 $F(\bar{x})$ 中元素 X 的个数，余类推。另外，对于 $\mathscr{X}$ 上的二元关系 $\succ$，再定义传递弧 $\succ'$，这里 $x\succ' y$ 是指存在点列 $x=x_0,x_1,\cdots,x_n=y$ 而使 $x_i\succ x_{i+1}$ 成立，$i=0,1,\cdots,n-1$。

定义 1.2.1 若图 $(\mathscr{X},\succ)$（不含平行枝和圈）存在一个具以下性质的点 $x^0\in\mathscr{X}$：1) $x\succ' x_0, x\in\mathscr{X}$；2) $F(x^0)=\varnothing$；3) $|F(x)|=1, x\neq x^0, x\in\mathscr{X}$，则称图 $(\mathscr{X},\succ)$ 为树，称点 x^0 为树的根，称集 $\partial\mathscr{X}=\{x\in\mathscr{X}\mid G(\succ,x)=\varphi\}$ 为集 $\mathscr{X}$ 的边界或树的末端。

注意当 $\mathscr{X}\neq\varnothing$ 时 $\partial\mathscr{X}\neq\varnothing$.

定义 1.2.2 有 n 个局中人的对策树是具有以下性质的三元组 $\Sigma=(\mathscr{X},\succ;a,u)$，它使得：1) $(\mathscr{X},\succ)$ 为树且 $\mathscr{X}\neq\partial\mathscr{X}$；2) a：$\mathscr{X}-\partial\mathscr{X}\to N=\{1,2,\cdots,n\}$ 为一个映射，这里 N 表示局中人集；3) u：$\partial\mathscr{X}\to R^n$ 为一个映射。

此定义描述了对策树。若 x^0 为树 $(\mathscr{X},\succ)$ 的根，且若 $a(x^0)=i\in N$，它说明 x^0 处代表局中人 i. 若此时局中人 i 选取点 $x^1\in G(\succ,x^0)$，而在 x^1 处指定了局中人 j，即 $a(x^1)=j\in N$，而此时局中人 j 却选取点 $x^2\in G(\succ,x^1)$，如此等等（读者可结合例 1 来看）。由树的结构（有限性），在有限次活动后可达到元素 $x^k\in\partial\mathscr{X}$，对应的有 $u(x^k)=(u^1(x^k),\cdots,u^n(x^k))$，此处 $u^i(x^k)$ 表示局中人 i 在树的此末端点 x^k 所得的"支付"。向量 $u(x^k)$ 表示在该末端点处局中人的支付的分布状况。

在树中，点 $x\in\mathscr{X}$ 代表一种状态，它应就具体问题加以解释。

如在前例中，点 b 表示当甲取正时乙进行选择。当然在此点乙作出自己的选择会影响如何确定下一个状态。此外，除去末端外，树中的点(它们称为节点)都按规则指定而对应于某局中人，为描述它们，引入集：

$$\mathscr{X}^i=\{x\in\mathscr{X}-\partial\mathscr{X}\mid a(x)=i\}\stackrel{\text{def}}{=\!=}a^{-1}(\{i\}) \tag{1.2.4}$$

它是在映射 a 之下代表局中人 i 的诸点的集。显然，对于树中每一点 $x\in\mathscr{X}-\partial\mathscr{X}$，对应某一个局中人 $i=a(x)$。他可在诸种可能的方案 $y\in G(\succ,x)$ 中作出决策，以便达到较理想的末端。诸局中人依规则轮流行动，最后形成如下序列：

$$X_0=x^0, X_l\in\mathscr{X}, X_l\succ X_{l-1}, l=1,2,\cdots,L$$

$$X_L\in\partial\mathscr{X} \tag{1.2.5}$$

此时称序列

$$X_0=(X_0,X_1,\cdots X_L) \tag{1.2.6}$$

为一局(play)，而局中人 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 的如下映射：

$$\begin{cases} a^i:\mathscr{X}^i\to\mathscr{X} \\ \text{使得 } a^i(x)\succ x, x\in\mathscr{X}^i \end{cases} \tag{1.2.7}$$

称为 i 的计划 (Plan)。由上可见对策的一局实际上是由对策树的根沿着指定的枝干而达到树的末端(树梢)的过程。当然计划比较复杂，因为局中人在按他的意愿作决策时并不能了解充分的信息，所以这些决策是凭“验前”知识作出的。在几何上表示由所在点选择一条枝干并画出指向下一节点的箭头。对 $\mathscr{X}^i$ 中每一点都可这样做。在 $x\in\mathscr{X}^i$ 中按 i 的意愿指定若干点便构成 i 的计划。现设 $\alpha=(\alpha^1,\alpha^2,\cdots,\alpha^n)$ 为由 n 个计划构成的 n 元组，其中 α^i 为局中人 i 的计划。显然对每个计划组，对应唯一的局 $X_\cdot=X_\cdot(\alpha)$，此时对应的序列为：

$$X_0=x^0, X_l=\alpha^{a(X_{l-1})}(X_{l-1}), l=1,2,\cdots,L$$

其中 $X_L\in\partial\mathscr{X}$，相应的支付规定为：

$$P_e^i(\alpha)=u^i(X_L(\alpha)), i=1,2,\cdots n \tag{1.2.8}$$

它依赖于全体局中人所选择的计划 $\alpha^1,\alpha^2,\cdots\alpha^n$。

现定义如下集合：

$$S^i=\{\alpha^i\,|\,\text{局中人}\ i\ \text{的所有计划}\} \tag{1.2.9}$$

并称它为局中人 i 的策略集。而称映射

$$P^i:S^1\times S^2\times\cdots\times S^n\to R \tag{1.2.10}$$

为局中人 i 的支付函数，$i=1,2,\cdots,n$。

定义 1.2.3 设 $\Sigma=(\mathscr{X},\succ;a,u)$ 为对策树，S^i 为局中人 i 的策略集，$P^i:S^1\times S^2\times\cdots\times S^n\to R$ 为支付函数，$i=1,2,\cdots,n$，称

$$\Gamma_\Sigma=(S^1,S^2,\cdots,S^n;P^1,P^2,\cdots,P^n) \tag{1.2.11}$$

为由 Σ 产生的 n 人对策，Γ_Σ 常简记作 $\Gamma_\Sigma=(S,P)$，其中 $S=S^1\times S^2\times\cdots\times S^n$，$P=(P^1,P^2,\cdots,P^n)$。

对策 Γ_Σ 也称为展开型对策。

前已指出 $\mathscr{X}^i$ 是局中人 i 在映射 a 之下所对应的点的集。把 $\mathscr{X}^i$ 划分成诸子集 $\mathscr{X}_k^i$，使在同一子集中的每个节点都有相同数目的节点紧接其后，且在同一子集中不可能有节点在另一节点之后，称子集 $\mathscr{X}_k^i$ 为 i 的信息集(imformationset)。由前面叙述可见对每个 $\mathscr{X}_k^i$ 及指标集 I_k，有一对一的映射设为 α_k^i 使 $\mathscr{X}_k^i$ 中每一个节点的紧接后继节点与之一一对应。在对策树 Σ 中若 i 的信息集 $\mathscr{X}_k^i$ 只含一个元素，称局中人 i 有完全信息(perfect information)。若对策 Γ_Σ 中每个局中人都在 Σ 中有完全信息，称对策 Γ_Σ 具完全信息。棋类具完全信息，而桥牌则不然。

例 2 设 $n=2$，对策树如图 1.2.2 所示：

其中：$\mathscr{X}=\{x^0,x,y,q,r,s,t\}$，$a(x^0)=1$，$a(x)=2$，$a(y)=2$，$u(q)=(-1,1)$，$u(r)=(1,-1)$．$u(s)=(2,-3)$，$u(t)=(0,10)$。这里局中人 1 标以甲，局中人 2 标以乙。此时甲有以下一些计划：

$$\alpha_1^1:\alpha_1^1(x^0)=x,\qquad \alpha_2^1:\alpha_2^1(x^0)=y$$

乙有如下的计划：

$$\alpha_1^2:\alpha_1^2(x)=q,\qquad \alpha_1^2(y)=s$$

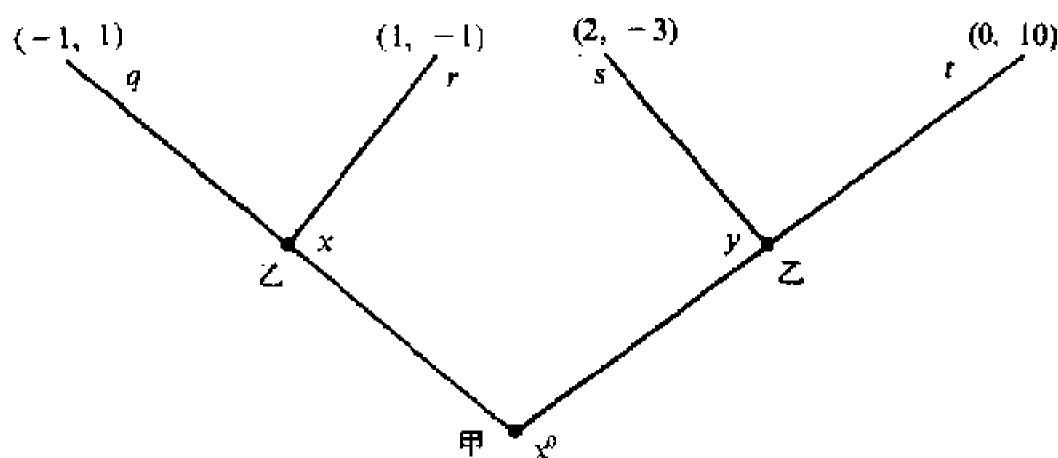


图 1.2.2

$$\alpha_2^2 : \alpha_2^2(x)=r, \qquad \alpha_2^2(y)=s$$
$$\alpha_3^2 : \alpha_3^2(x)=q, \qquad \alpha_3^2(y)=t$$
$$\alpha_4^2 : \alpha_4^2(x)=r, \qquad \alpha_4^2(y)=t$$

而支付均已标于树的诸末端点，例如 $p^1(\alpha_1^1,\alpha_3^2)=u^1(q)=-1$，等等。

假设每个局中人都争取最大收益，则在此例中甲的最大收益(即支付)为 2，乙的最大收益为 10. 但这只是双方一厢情愿的想法。甲收益为 2 时乙得−3，而乙得到 10 时甲得为 0. 故甲乙之间就存在矛盾，要达目的就要互相斗智。怎样才能达到双方都能接受的状态？ 便引出平衡点(equilibrium point)的概念。

一般说来，在对策问题描述的竞争或冲突中，诸局中人都希望达到自己预期的目的，并相应采取各自认为最适当的策略，因而形成局势。显然，诸局中人采取的策略会互相影响，因此自然会提出以下问题：(1)什么是局中人认为可以容忍的局势？(2)是否存在一个为所有局中人都愿接受的“平衡”局势？(3)什么是局中人所应采取的“优”策略？怎样求出这种策略？这些都是对策论的基本问题。

定义 1.2.4 在对策 $\Gamma_{\sum}=(S,P)$ 中，设有策略组 $\bar{\alpha}=(\bar{\alpha}^1,\bar{\alpha}^2,$

$\cdots,\bar{\alpha}^n)$，使对于任何 $i\in N$ 及 $\alpha^i\in S^i$，均有

$$P^i(\bar{\alpha}^1,\bar{\alpha}^2,\cdots,\bar{\alpha}^{i-1},\alpha^i,\bar{\alpha}^{i+1},\cdots,\bar{\alpha}^n)$$
$$\geqslant P^i(\bar{\alpha}^1,\bar{\alpha}^2,\cdots,\bar{\alpha}^{i-1},\bar{\alpha}^i,\bar{\alpha}^{i+1},\bar{\alpha}^n) \qquad (1.2.12)$$

则称 $\bar{\alpha}=(\bar{\alpha}^1,\bar{\alpha}^2,\cdots,\bar{\alpha}^n)$ 为对策 Γ_{Σ} 的一个平衡点。

由定义可见任何局中人若单独改变自己的策略 $\bar{\alpha}^{-i}$，他的收益只可能降低，因此他们中任何人都不会单独行动，这就构成一种平衡状态。问题是平衡点是否存在？

定理 1.2.1（Zermelo－von Neumann－Kuhn）设 Σ 为对策树，则 Γ_Σ 有一个平衡点。

证　下面给出一个构造性证明，它实际上是计算 Γ_Σ 的平衡点的过程，它有点类似动态规划的算法。首先讨论策略组 $\bar{\alpha}^i,i\in N$ 的选取。现定义递推的映射族 $v^i:\mathscr{X}\to R,i\in N$ 如下：

(a) 对于 $x\in\partial\mathscr{X}$，令 $v^i(x)=u^i(x)$.

(b) 若 $x\in\mathscr{X}-\partial\mathscr{X}$，并设 $v^1,v^2,\cdots,v^n$ 关于一切 $y\in G(\succ,x)=G(x)$ 均有定义。然后按以下方式进行：(1)置 $i_0=a(x)$，即 $x\in\mathscr{X}^{i_0}$；(2)置 $v^{i_0}(x)=\max\limits_{y\in G(x)}v^{i_0}(y)$；(3)在 $G(x)$ 中选取 $\bar{y}$ 使 $v^{i_0}(\bar{y})=v^{i_0}(x)$；(4)令 $\bar{\alpha}^{i_0}(x)=\bar{y}$；(5)对一切 $i\neq i_0$，令 $v^i(x)=v^i(\bar{y})$.

这样我们构造了策略组 $\bar{\alpha}=(\bar{\alpha}^1\bar{\alpha}^2\cdots\bar{\alpha}^n)$，使对每个 $X\in\mathscr{X}$ 均有意义，即对每个 $X\in\mathscr{X}$，可确定 $\alpha^i(x)$。下面证明 $\bar{\alpha}$ 为 Γ_{Σ} 的平衡点，且 $P^i(\bar{\alpha})=v^i(x^0)$。下面用归纳法证之。设

$$k=\|\mathscr{X}\|=\max\{L\mid 其中(X_0,X_1,\cdots X_L)为\mathscr{X}中的一局\} \qquad (1.2.13)$$

称 k 为树的长度。若 $k=1$，定理显然，故假设 $\|\mathscr{X}\|=k>1$.

对于 $y\in G(x^0)$，再按以下方式定义子对策树：

它是将对策树中节点 y 看作根的分枝构成的子树，记作 $\sum^y$，其方式为：令

$$\mathscr{X}^y=\{y\}\cup G(\succ',y) \qquad (1.2.14)$$

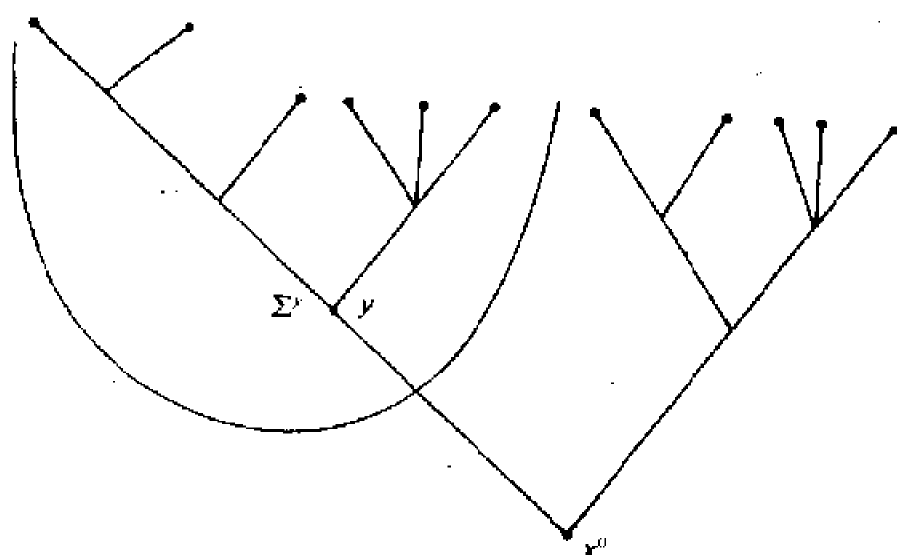


图 1.2.3

其中$>$是定义在$\mathscr{X}^{>y}$上的，为明确计，有时记作$>^y$. 且$a^y=a|_{\mathscr{X}^{>y}}$，$u^y=u|_{\mathscr{X}^{>y}}$，从而$\Sigma^y$可写作$\Sigma^y=(\mathscr{X}^{>y},>^y,a^y,u^y)$。

现在由归纳法假设，设$u^y=u|_{\mathscr{X}_y}$，$\bar{\alpha}^y=\bar{\alpha}|_{\mathscr{X}_y}$，它们有以下性质：(1)$\bar{\alpha}^y$是由$\Sigma^y$产生的对策$\Gamma^y=\Gamma_{\Sigma^y}$的一个平衡点；(2)$u^{y,i}(y)=P^{y,i}(\bar{\alpha}^y)$，这里$P^{y,i}(\alpha^1)$是对策树$\Sigma y$中的计划$\alpha^1$时的支付。由于$v^y$是$v$在$\mathscr{X}^{>y}$上的限制，所以有$v^{y,i}(y)=v^i(y)$. 现在对所有的$y\in G(X^0)$、应用以上性质来证$\bar{\alpha}$为$\Gamma_\Sigma$的平衡点，且$P^i(\bar{\alpha})=v^i(X_0)$，$i\in N$. 设$X^0\in\mathscr{X}^{i_0}$，即$a(x^0)=i_0$，它是$i_0$将在$x^0$处作出选择。并设由此确定出$\bar{y}=\bar{\alpha}^{i_0}(x^0)$，即局中人$i_0$按前述步骤依计划$\bar{\alpha}$确定选取$\bar{y}$，显见有

$$\begin{cases} v^{i_0}(x^0) = \max\limits_{y\in G(x^0)} v^{i_0}(y) = v^{i_0}(\bar{y}) \\ v^i(x^0) = v^i(\bar{y}) \quad ,i\neq i_0 \end{cases} \tag{1.2.15}$$

为要证$\bar{\alpha}$为平衡点，应证对任何$i\in N$，及$\alpha^i\in S^i$，有$P^i(\bar{\alpha})\geqslant P^i(\bar{\alpha}^1$，

$\bar{\alpha}^2,\cdots,\alpha^i,\cdots,\bar{\alpha}^n$)。为书写方便计，将$(\bar{\alpha}^1,\bar{\alpha}^2,\cdots,\alpha^i,\cdots,\bar{\alpha}^n)$记作$\hat{\alpha}$，同时把$\hat{\alpha}$改写作$(\hat{\alpha}^1,\hat{\alpha}^2,\cdots,\hat{\alpha}^n)$。同时记$\hat{\alpha}$在$\mathscr{X}^y$上的限制为$\hat{\alpha}^y$，这里$y\in G(x^0)$。此时对于任何$\alpha\in S^1\times S^2\times\cdots\times S^n$及其在$\mathscr{X}^y$上的限制$\alpha^y$，可推知：

$\alpha^{i_0}(x^0)=y\Rightarrow P^i(\alpha)=P^{y,i}(\alpha^y),i\in N$。(1.2.16)这是显然的。再由归纳法假设，在此分枝上有

$$P^i(\bar{\alpha})=P^{\bar{y},i}(\bar{\alpha}^{\bar{y}})=v^{\bar{y},i}(\bar{y})=v^i(\bar{y})$$
$$=v^i(x^0),i\in N \qquad (1.2.17)$$

现在对于$i\neq i_0$，$\bar{\alpha}^{i_0}=\hat{\alpha}^{i_0}$，且

$$\bar{\alpha}^{i_0}(x^0)=\hat{\alpha}^{i_0}(x^0)=\bar{y} \qquad (1.2.18)$$

所以

$$P^i(\bar{\alpha})=P^{y,i}(\bar{\alpha}^y)\geqslant P^{y,i}(\hat{\alpha}^y)=P^i(\hat{\alpha}).$$

但另一方面，对于$i=i_0$，由$\hat{\alpha}^{i_0}(x_0)=\hat{y}$及(利用前面所得诸式及归纳法假设)

$$P^{i_0}(\bar{\alpha})=v^{i_0}(x_0)\geqslant v^{i_0}(y)=P^{\hat{y},i_0}(\bar{\alpha}^{\hat{y}})$$
$$\geqslant P^{\hat{y},i_0}(\bar{\alpha}^{\hat{y}})=P^{i_0}(\hat{\alpha})$$

便证明了(1.2.12)。证毕。

由证明可见在每个子树$\mathscr{X}^y$中，依归纳法存在Γ_{x^y}的平衡点，在这些平衡点处给出局中人i_0的支付。此时i_0可在x^0处作出决策使其支付为以上支付的最大者，这样就得到Γ_x的一个平衡点。

定理提供了构造Γ_x的平衡点的方法，并给出相应的支付。其过程是：(1)画出$\Sigma=(\mathscr{X},\succ,a,u)$的图，并在每个节点$x\notin\partial\mathscr{X}$处标上相应的$a(\cdot)$，在末端$x\in\partial\mathscr{X}$处标上相应的$u(\cdot)$。(2)按以下方式确定递推函数$v^i$：(a)在$x\in\partial\mathscr{X}$处定义$v^i(x)=u^i(x)$；(b)若$x\notin\partial\mathscr{X}$，且图中的$v^i(y),i\in N,y\in G(x)$均已给定，则在给定$i_0=a(x)$时，选取可使$v^{i_0}(\bar{y})=\max\limits_{y\in G(x)}v^{i_0}(y)$并画出由$x$到$\bar{y}$的箭头，同时在$x$处标出向量$(v^1(x),\cdots,v^n(x))=v(x)$，且规定$v(x)=v$

$(\bar{y})$；(c)以上过程当到达表示根的节点 x^0 处时结束。于是在每一点 $x\in\mathscr{X}-\partial\mathscr{X}$，都画出一个箭头，同时也确定了 Γ_x 的一个平衡点 $(\bar{\alpha}^1,\cdots,\bar{\alpha}^n)$，并且 $v(x^0)$就是$(P^1(\bar{\alpha}),\cdots,P^n(\bar{\alpha}))$。最后由 $\bar{\alpha}$ 所诱导出的一局 $X.(\bar{\alpha})$是由 x^0 出发，由相继而连接诸箭头所构成的。

例 3　设有甲、乙、丙三人，对策树如图 1.2.4.

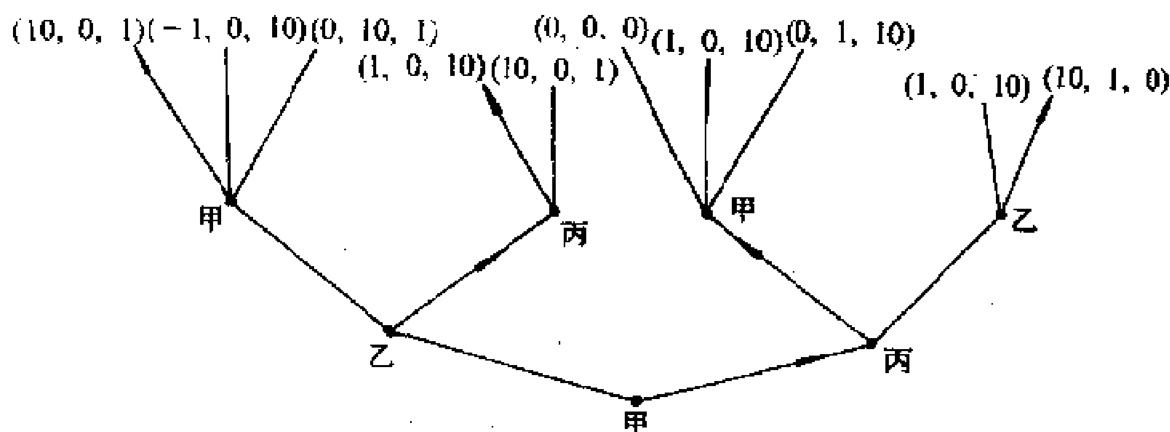


图 1.2.4

根据上述法则可作箭头如图。图中指出的一个平衡点为(1.0.10)。

下面看 $n=2$ 时的情形。若 $u^1(x)=-u^2(x)$，$x\in\partial\mathscr{X}$，则称对策 Γ_x 为二人零和对策(two—person zero sum game). 此时可设 $u=u^1=-u^2$，其中 $u:\partial\mathscr{X}\to R$.

例 4　翻摊游戏　它是指两人玩的一种游戏。在桌上放五根火柴，甲、乙可轮流任意从中取走一根或两根，谁取走最后一根或两根便获胜，设胜者得 1 分，输者失 1 分，问双方应该怎样做?

此时可画出对策树如下：图中的每个节点处除证明对应的局中人之外，并注明当时桌上还有几根火柴，当根数为零时即宣告游戏结束，同时给出双方的得分。

由图显然可见当甲首先从桌上取火柴时，只要第一次取两根，

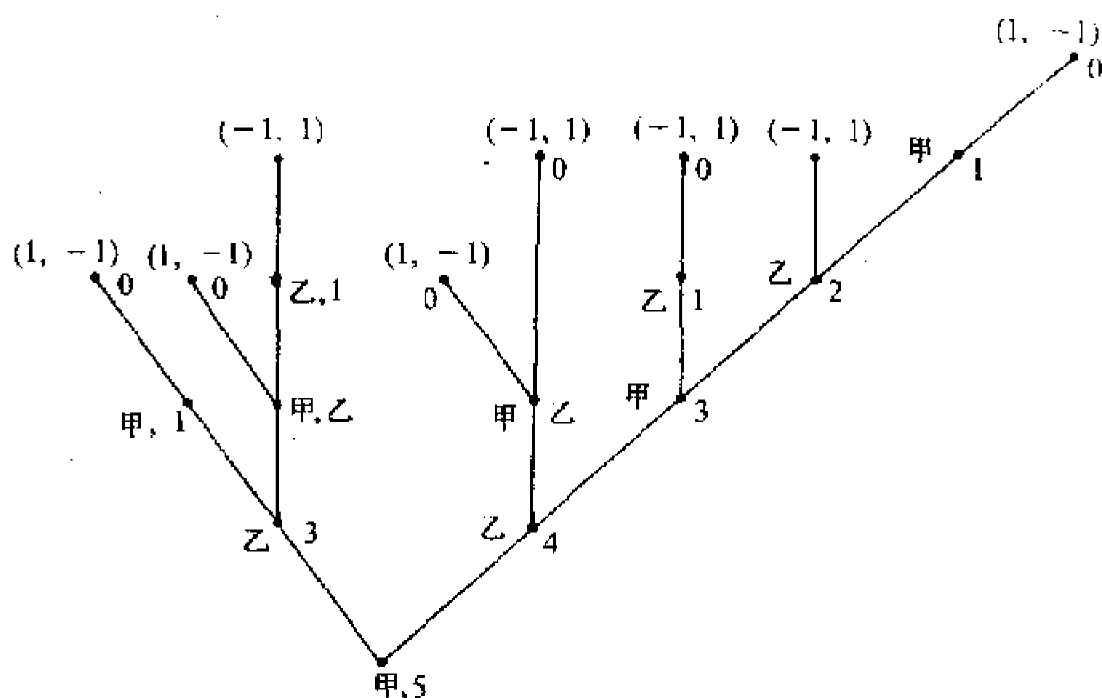


图 1.2.5

然后再视乙的行动而取，若乙取一根则甲取两根，乙取两根则甲取一根，甲总能胜。若甲第一次取走一根，只要乙不出错，乙总能赢。

此对策在文献中称为 Nim 对策，它是上述游戏的推广。

§3 二人对策概述

二人对策是对策论最早被仔细研究的重要对策，其中最重要的是正规型(Normal form)对策。仍以猜币问题为例，每个局中人都有两个方案即出“正”面或出“反”面，我们把各种可能的结果列成下表：

甲 \ 乙	正	反
正	(−1,1)	(1,−1)
反	(1,−1)	(−1,1)

表中括号内第一个数字表示甲的所得，第二个数字表示乙的所得。

通常，设局中人的集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，每个局中人 i 都有自己的策略集 S^i，以及支付函数 P^i，$i\in N$. 此时支付往往是诸局中人所取策略 $(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ 的函数，其中 $\sigma_i\in S^i$，$i\in N$，此时重新给出对策的定义：

定义 1.3.1 给定三元组

$$\Gamma=\langle N,\{S^i\}_{i\in N},\{P^i\}_{i\in N}\rangle \tag{1.3.1}$$

其中 $N,S^i,i\in N$ 均是集合，而 P^i 是定义在 $S=\prod\limits_{i\in N}S^i$ 上的实值函数，则称 Γ 为一个对策。

虽然定义与定义 1.2.3 相似，但此处已撇开对策树，并经常采用列表方式。由于此种形式的对策能明显地指出不同策略所带来的支付，故常称为策略型(Strategy form)或正规型。若在对策中诸局中人均只有有限个策略，便称它为有限对策(相应的，若用对策树表示，则树有有限个顶点)。

下面我们着重讨论 $n=2$ 时的情形。设局中人为甲、乙两人，并设甲的策略集为 S^1，乙的策略集为 S^2，甲的支付函数为 $P^1:S^1\times S^2\to R$，乙的支付函数为 $P^2:S^1\times S^2\to R$，它们分别表示当取策略对 $(\sigma_1,\sigma_2)\in S^1\times S^2$ 时甲、乙分别得到的收益(或损失)，并令 $P(\sigma_1,\sigma_2)=\{P^1(\sigma_1,\sigma_2),P^2(\sigma_1,\sigma_2)\}$，称映射 $P:(\sigma_1,\sigma_2)\in S^1\times S^2\to R$ 为双支付(Bi--payoff)。不过并非所有策略对都能实现，故只考虑 $S^1\times S^2$ 的可行子集 U，同时将二人正规型对策简记为 $\Gamma=<U,P>$，再假设双方都希望自己的收益越大越好，此时记：

$$\begin{cases}\beta_1=\sup\limits_{(\sigma_1,\sigma_2)\in U}P^1(\sigma_1,\sigma_2)\\ \beta_2=\sup\limits_{(\sigma_1,\sigma_2)\in U}P^2(\sigma_1,\sigma_2)\end{cases} \tag{1.3.2}$$

设 β_1、β_2 为有限，此时称对策 $<U,P>$ 为有限，并称 $\beta=\{\beta_1,\beta_2\}$ 为

对策的"影子最大"，若恰巧存在$(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)\in U$使$\beta_1=P^1(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)$，$\beta_2=P^2(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)$，由于策略对$(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)$给出甲、乙双方所期望的最大收益，故$\bar{\sigma}=(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)$是最优解。但不幸这种情况极少。显然$P(U)\subset\beta-R_+^2$，这里$R_+^2$是指域$\{\sigma_1\geqslant0,\sigma_2\geqslant0\}$。

当双方互相竞争时彼此会互相伤害，故应引入函数P^{i*}如下。(以下，假设$U=S_1\times S_2$)：

$$\begin{cases}P^{1*}(\sigma_1)=\inf\limits_{\sigma_2\in S^2}p^1(\sigma_1,\sigma_2)\\P^{2*}(\sigma_2)=\inf\limits_{\sigma_1\in S^1}P^2(\sigma_1,\sigma_2)\end{cases}\tag{1.3.3}$$

这里$P^{1*}(\sigma_1)$的含义是当甲取σ_1时乙选取策略使甲所得的最小收益，也可以把它看作在不知乙采取何种行动时甲所作的关于收益为最坏的估计。甲应在此前提下讨论自己的策略。甲应选取使P^{1*}取极大的策略σ_1^*，类似，乙应选取使P^{2*}取极大的策略σ_2^*，即引入：

定义 1.3.2 若有策略σ_1^*使

$$P^{1*}(\sigma_1^*)=v_{\sigma_1}^*=\sup_{\sigma_1\in S^1}P^{1*}(\sigma_1)\tag{1.3.4}$$

称σ_1^*为甲的保守策略(Conservative Strategy)。类似地，若策略σ_2^*使

$$P^{2*}(\sigma_2^*)=v_{\sigma_2}^*=\sup_{\sigma_2\in s^2}P^{2*}(\sigma_2)\tag{1.3.5}$$

则称σ_2^*为乙的保守策略。

这里保守二字是指在最坏情况下局中人所争取到的最好效益，σ_1^*，σ_2^*分别给出甲、乙的保守解。当然在某些情况下也许并不需要使用保守策略。

另一种解的概念是非合作平衡。

定义 1.3.3 若有策略对$\{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2\}$满足

$$\begin{cases} P^1(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2) = \max\limits_{\sigma_1 \in S^1} P^1(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2) \\ P^2(\vec{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2) = \max\limits_{\sigma_2 \in s^2} P^2(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2) \end{cases} \tag{1.3.6}$$

则称策略对$\{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2\}$为对策的非合作平衡策略对(Noncooperative equilibrium strategy pair)。

非合作平衡策略的含义也是显见的。让我们从以下角度加以说明。甲的决策规则可看作如下映射 $\bar{C}:S^2\to S^1$ 使对一切 $\sigma_2\in S^2$，有

$$P^1(\bar{C}(\sigma_2),\sigma_2) = \max\limits_{\sigma_1 \in S^1} P^1(\sigma_1,\sigma_2)$$

同样，乙的最优决策规则为如下映射 $\bar{D}:S^1\to S^2$，它满足：对一切 $\sigma_1 \in S^1$，有

$$P^2(\sigma_1\bar{D}(\sigma_1)) = \max\limits_{\sigma_2 \in S^2} P^2(\sigma_1,\sigma_2)$$

这时显见方程组：

$$\begin{cases} \bar{C}(\bar{\sigma}_2) = \bar{\sigma}_1 \\ \bar{D}(\bar{\sigma}_1) = \bar{\sigma}_2 \end{cases}$$

的解$\{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2\}$就是一个非合作平衡。更一般地，若用 $\bar{\mathscr{C}}$ 记如下定义的由 S^2 到 S^1 的映射：

$$\forall\ \sigma_2 \in S^2, \bar{\mathscr{C}}(\sigma_2) = \{\bar{\sigma}_1 \in S^1 | P^1(\bar{\sigma}_1,\sigma_2) = \max\limits_{\sigma_1 \in S^1} P^1(\sigma_1,\sigma_2)\} \tag{1.3.7}$$

同样用 $\bar{\mathscr{D}}$ 记由 S^1 到 S^2 的映射：

$$\forall\ \sigma_1 \in S^1, \bar{\mathscr{D}}(\sigma_1) = \{\bar{\sigma}_2 \in S^2 | P^2(\sigma_1,\bar{\sigma}_2) = \max\limits_{\sigma_2 \in S^2} P^2(\sigma_1,\sigma_2)\} \tag{1.3.8}$$

则策略对$\{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2\}$为非合作平衡的充要条件是：

$$\bar{\sigma}_1 \in \bar{\mathscr{C}}(\bar{\sigma}_2)\ \text{且}\ \bar{\sigma}_2 \in \bar{\mathscr{D}}(\bar{\sigma}_1) \tag{1.3.9}$$

即$\{\bar{\sigma},\bar{\sigma},\}$是对应于$\{\sigma_1,\sigma_2,\}\to\bar{\mathscr{C}}_2(\bar{\sigma}_2)\times\bar{\mathscr{D}}(\sigma_1)$的不动点。

若引入以下函数

$$\begin{cases}\overline{P}^1(\sigma_2) = \sup\limits_{\sigma_1 \in S^1} P^1(\sigma_1,\sigma_2) \\ \overline{P}^2(\sigma_1) = \sup\limits_{\sigma_2 \in S^2} P^2(\sigma_1,\sigma_2)\end{cases} \tag{1.3.10}$$

并令 $\overline{P}(\sigma_1,\sigma_2)=\{\overline{P}^1(\sigma_2),\overline{P}^2(\sigma_1)\}$，则可推知$(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)$为非合作平衡的充要条件是$P(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)=\overline{P}(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)$。

另一重要概念是 Pareto 最优。它有别于以上两类解，其中实际隐含着合作的因素，即同时考虑甲、乙双方的利益。

定义 1.3.4 对于策略对$\{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2\}\in v$，若不存在策略对$\{\sigma_1,\sigma_2\}\in u$，使得同时有：

$$\begin{cases}P^1(\sigma_1,\sigma_2) > P^1(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2) \\ P^2(\sigma_1,\sigma_2) > P^2(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)\end{cases} \tag{1.3.11}$$

成立，则称$\{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2\}$为对策的 Pareto 最优策略。

这个定义说 Pareto 策略对两者来说，已找不到"更好"的策略对。不过在实际中这种 Pareto 最优策略对的数量可能很多，但能否再作改进？显然若甲的收益低于他的保守值，他必不愿接受。因此，若$\{\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2\}$使 $P^1(\sigma_1,\sigma_2)<v^*_{\sigma_1}$，则甲必然拒绝$\{\sigma_1,\sigma_2\}$，同样，若此策略对使 $P^2\{\sigma_1,\sigma_2\}<v^*_{\sigma_2}$，则乙必拒绝$\{\sigma_1,\sigma_2\}$. 现在再引入核心(Core)的概念。

定义 1.3.5 在二人对策的 Pareto 最优解集之中，凡既不为甲拒绝，又不为乙拒绝的策略对的策略对的全体的集称为解的核心。

定义中有两个含义：核心中的策略对$\{\sigma_1,\sigma_2\}$既不被甲拒绝，又不被乙拒绝，所以考虑了个人的合理要求，而策略对又是 Pareto 最优，这是从集体角度考虑的合理要求。由此可见核心是 Pareto 最优集中满足 $P(\sigma_1,\sigma_2)\geqslant v^*$ 的子集。

例 1 设有二人对策 Γ，甲有两个策略 Ⅰ，Ⅱ，乙有三个策略，1,2,3，双方得失列于下面表中，括号内第一个数字为甲所得，第二

个数字为乙所得(今后各例中均如此表示):

甲 \ 乙	1	2	3
Ⅰ	(6, −3)	(−3, 0)	(3, −3)
Ⅱ	(−3, 2)	(5, −2)	(−4, −7)

显然 $\beta_1=6,\beta_2=2$. 此即影子极大。其次，易见

$$P^{1*}(Ⅰ)=\inf_{\sigma_2\in S^2}P^1(Ⅰ,\sigma_2)=-3,P^{1*}(Ⅱ)=-4,$$

$$P^{2*}(1)=\inf_{\sigma_1\in S^1}P^2(\sigma_1,1)=-3,P^{2*}(2)=-2,$$

$$P^{2*}(3)=-7$$

从而 $v_{\sigma_1}^*=\sup\limits_{\sigma_1\in S^1}P^{1*}(\sigma_1)=-3=P^{1*}(Ⅰ),v_{\sigma_2}^*=-2=P^{2*}(2)$。从而 $\sigma_1^*=Ⅰ,\sigma_2^*=2$ 为保守解。

为说明非合作解，先作出与 P 相对应的算子 $\overline{P}$ 的矩阵:

甲 \ 乙	1	2	3
Ⅰ	(6, 0)	(5, 0)	(3, 0)
Ⅱ	(6, 2)	(5, 2)	(3, 2)

将 $P(\sigma_1,\sigma_2)$ 与 $\overline{P}(\sigma_1,\sigma_2)$ 相比，不存在 $(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)$ 使 $P(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)=\overline{P}(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)$ 成立，故无非合作平衡解。至于 Pareto 最优，依定义有以下策略对:$\{Ⅰ,1\},\{Ⅱ,2\},\{Ⅱ,1\}$，而核心为以下的策略对:

$$\{Ⅱ,2\},\{Ⅱ,1\}.$$

例 2　囚徒两难问题，甲、乙两人因犯罪而牵涉于某案件中，但法院只掌握部分罪证。甲、乙两人都有两个策略:不认罪和坦白。相应后果为:若两人同时否认罪责，法院因罪证不足，只判 a 年徒刑;若两人同时坦白，根据案情将判 x 年徒刑;若两人中有一人坦

白，一人否认，坦白者获得宽大而不予判刑，坚不认罪者因抗拒而重判为 b 年徒刑。以上结果见下表：

甲＼乙	1(不认罪)	2(坦白)
Ⅰ(不认罪)	$(-a,-a)$	$(-b,0)$
Ⅱ(坦白)	$(0,-b)$	$(-x,-x)$

其中 $0<a<x<b$，此时显然可得

$$P^{1*}(\mathrm{I})=-b, P^{1*}(\mathrm{II})=-x$$

$$P^{2*}(1)=-b, P^{2*}(2)=-x$$

于是有 $v^*=(-x,-x)=(p^{1*}(\mathrm{II}),P^{2*}(2))$。至于非合作平衡，可列出 $\overline{P}$ 的矩阵如下：

两相比较可见 $P(\mathrm{II},2)=\overline{P}(\mathrm{II},2)$，即双方都坦白是双方的非合作平衡解，也即双方的较好策略。

甲＼乙	1	2
Ⅰ	$(0,0)$	$(-x,0)$
Ⅱ	$(0,-x)$	$(-x,-x)$

例 3　夫妻争吵问题　夫妻甲、乙，甲是球迷，乙爱音乐。适逢周末，体育场有精采球赛，剧院有动人的音乐会，两人讨论如何渡过周末。甲爱看球赛，当然也可陪妻听音乐；乙渴望参加音乐会，但也可陪丈夫看球赛。假如可对上述活动依两人意愿评分的话，设有如下评分：

甲＼乙	1(看球赛)	2(听音乐)
Ⅰ(看球赛)	$(a,0)$	(b,b)
Ⅱ(听音乐)	(b,b)	$(0,a)$

其中设 $b<0<a$，这里 a 表示在受到另一方的陪同并由于爱好得到享受上的满足给予的评分，0 表示牺牲自己爱好时在享受方面的评分。b 表示甲、乙双方虽然都按自己的爱好渡过周末，但双方却不能在一起而深为遗憾时的评分。显见 $P^{1*}(\mathrm{I})=b, p^{1*}(\mathrm{II})=b, P^{2*}(1)=b, p^{2*}(2)=b$，从而 $v_{\sigma_1}^*=\max(b,b)=b, v_{\sigma_2}^*=b$，即 $v^*=(b,b)$，相应的策略对为 $\{\mathrm{I},2\}$，$\{\mathrm{II},1\}$ 至于 $\bar{P}$ 的矩阵为：

甲 \ 乙	1	2
I	$(a,0)$	$(0,0)$
II	$(0,0)$	$(0,a)$

故非合作解是 $\{\mathrm{I},1\}$ 及 $\{\mathrm{II},2\}$，它们也是 Pareto 最优，即两人在一起渡过周末，当然另一方是要作出牺牲的。

二人对策中，局中人可能有无限多种策略，此即二人无限对策。若在二人对策中局中人选取策略时其状态与时间有关，并受到一组微分方程的约束，就导致对微分对策的研究。

§4 多人对策概述

局中人多于两个的对策叫多人对策，这在§2 中已有介绍。定义 1.3.1 实即 N 人正规型对策的定义，即 $\Gamma=\langle N,\{S^i\}_{i\in N},\{p^i\}_{i\in N}\rangle$，记号及含义均见§3。若

$$\sum_{i=1}^{n} p^i(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)\equiv C(\text{常数})$$

这里 $n=|N|$ 为局中人集 N 中局中人的总数。$\sigma_i\in S^i, i=1,2\cdots,n$ 为他们各自的策略，则称 Γ 为常和对策，若 $C=0$，称 Γ 为零和对策。当局中人选取策略时不允许局中人互通信息，也不允许结伙，则称对策为非合作对策。

非合作对策中的主要概念是平衡点，它是由纳希(J. Nash)提出的，其定义即为§2中定义1.2.4，即若在对策$\Gamma=\langle N,\{S^i\}_{i\in N},\{P^i\}_{i\in N}\rangle$中，若存在策略组$(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2\cdots,\bar{\sigma}_n)$使对每个$i$及每个$\sigma_i\in S^i$，都有

$$P^i(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_{i-1},\bar{\sigma}_i,\bar{\sigma}_{i+1},\cdots,\bar{\sigma}_n)$$
$$\geqslant P^i(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_{i-1},\sigma_i,\bar{\sigma}_{i+1},\cdots,\bar{\sigma}_n) \qquad (1.4.1)$$

成立，此时称策略组$(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2,\cdots,\bar{\sigma}_n)$为Nash平衡点。当$S^i$为紧凸集，且$P^i$连续时，$i\in N$，且对任何给定的$\bar{\sigma}_j,j\neq i,P^i$关于$\sigma_i$为拟凹，Nash证明平衡点存在，其工具为不动点原理。

如果允许局中人之间相互合作并结盟，这就导致n人合作对策的研究。N的子集S中局中人彼此合作、一致行动而形成联盟，称S为联盟(Coalition)。此时应有一个衡量联盟S的效益(或利益、权力、或分摊的损失…等)指标的函数。设对于N的子集族$\mathscr{S}$中任何一个元素，也即N的任何一个子集S，对应一个实数$v(S)$，并假设它满足：

(i) $v(\varnothing)=0$，其中$\varnothing$为空集；

(ii) 若$S,T\subset N$，有$S\cap T=\varnothing$，则

$$v(S\cup T)\geqslant v(S)+v(T) \qquad (1.4.2)$$

条件(ii)称为超加性(Supperadditive)，它反映了两个较小联盟合并之后构成的新联盟，其效益应不小于原来两较小联盟效益之和。因此在此模型中不同联盟之间存在合作的愿望。因N的每个子集均对应了这样的实数，从而在N的子集族$\mathscr{S}$上就定义了一个实数集值函数，并称它为n人合作对策的特征函数(Characteristic function)。由于合作对策中特征函数刻划了诸联盟的效益，十分重要，故合作对策常用记号$\Gamma=\langle N,v\rangle$表示，有时简单的用$v$表示。

n人合作对策的解概念与二人对策的解概念差异很大，因为这里涉及联盟中成员利益的分配问题，在此基础上讨论了局中人

诸种解概念，我们将在有关章节中予以详细介绍。

§5 对策论的应用范围

早期 Von Neumann 与 Morgenstern 的经典名著《竞赛论与经济行为》一书就是企图将对策理论用于分析经济问题的。

经济理论中的数学研究方法可分为两类：一类是以定性研究为目标的纯粹理论，称为数理经济学；另一类以证实的、统计的研究为目的，称为计量经济学。对策论主要应用于数理经济学中。

数理经济学源出于 A. Cournot(1801－1877)的研究工作，此后 L. Walras(1834－1910)提出一般平衡理论，但数理经济学的正式确立则是本世纪 40 年代之后，它无论在思想上与方法上都受到对策论的直接或间接的影响。

Walras 的一般平衡理论是以完全竞争经济(Competitive economy)的分析为主要内容，他的模型中包括消费者、生产者以及大量的财货三方构成的经济系统。此时若存在适当的价格体系(财货的交换比率)，在此价格体系下各主体作为价格的接受者进行活动，使消费者得到最大效益，生产者获得最大利润，且使财货供需达到一致的完全竞争平衡的状态。这一命题称为竞争平衡的存在定理。它由 Walras 提出，但严格的数学证明却是半个世纪后由 G. Debreu 利用对策论的方法给出的，Debreu 因此获得诺贝尔经济学奖金。至于对策论在经济学中的应用，本书还将在有关章节中介绍。

对策论在军事领域中也有广泛应用，典型的有兵力分配问题、战前冲突前景分析、空战模型等，将另章介绍。

对策论还可应用于政治领域，如选举、谈判等。

总之，对策论有广泛的应用领域，还有许多领域的应用有待开

拓。由于竞争、合作，既竞争又合作等行为是人类社会中常见的人的行为，因此必将有更多的领域能够应用对策论的理论与方法。

参 考 文 献

[1] 冯·诺伊曼，摩根斯特恩．竞赛论与经济行为．科学出版社，1963

[2] 麦克金赛 J C C. 博奕论导引．人民教育出版社，1960

[3] Luce R D, Raiffe H. Games and Decisions. New York: John wiley & sons, 1957

[4] 中国科学院数学研究所二室．博奕论导引．人民教育出版社，1960

[5] Samuel karlin. Mathematical Methods and Theory in Games. Programming and Economics(I , I). Pergamon Press, 1959

[6] Aubin J P. Mathematical Methods of Games and Economic Theory. North-Holland, 1979

第二章 二人零和有限对策

§1 定义和基本概念

第一章§3已对二人对策作了一般介绍。本章讨论的对策 $\Gamma = (S^1, S^2; P^1, P^2)$ 中，$S^i (i=1,2)$ 均为有限集（即局中人只有有限个策略），且 $P^1 + P^2 \equiv 0$，因此 $P^2 = -P^1$。它说明乙的所得即甲的所失，反之亦然。这类对策描述了局中人之间的对抗性矛盾，在此情况下第一章§3中所引进的许多解概念都具有特殊形式。

首先考察影子极大，利用第一章中的符号（见第一章§3），由于 $P^2(\sigma_1, \sigma_2) = -P^1(\sigma_1, \sigma_2)$，所以

$$\begin{cases} \beta_1 = \sup\limits_{(\sigma_1, \sigma_2) \in U} P^1(\sigma_1, \sigma_2) \\ \beta_2 = \sup\limits_{(\sigma_1, \sigma_2) \in U} P^2(\sigma_1, \sigma_2) = \sup\limits_{(\sigma_1, \sigma_2) \in U} (-P^1(\sigma_1, \sigma_2)) \\ \quad = -\inf\limits_{(\sigma_1, \sigma_2) \in U} P^1(\sigma_1, \sigma_2) \end{cases} \tag{2.1.1}$$

其次，考察 $P^{i*}(\sigma_i)$，由于

$$P^{2*}(\sigma_2) = \inf_{\sigma_1, \in S^1} P^2(\sigma_1, \sigma_2) = \inf_{\sigma_1, \in S^1} (-P^1(\sigma_1, \sigma_2))$$

$$= -\sup_{\sigma_1, \in S^1} P^1(\sigma_1, \sigma_2) = -\overline{P}^1(\sigma_2),$$

它是乙的最坏收益。故保守解策略是如下策略 σ_1^*，它使

$$P^{1*}(\sigma_1^*) = v_{\sigma 1}^* = \sup_{\sigma_1 \in S^1} P^{1*}(\sigma_1)$$

$$= \sup_{\sigma_1 \in S^1} \inf_{\sigma_2 \in S^2} P^1(\sigma_1, \sigma_2) \qquad (2.1.2)$$

还有 σ_2^*，它使

$$P^{2*}(\sigma_2^*) = v_{\sigma_2}^* = \sup_{\sigma_2 \in S^2} P^{2*}(\sigma_2)$$

$$= \sup_{\sigma_2 \in S^2}(-\sup_{\sigma_1 \in S^1} P^1(\sigma_1, \sigma_2))$$

$$= -\inf_{\sigma_2 \in S^2} \sup_{\sigma_1 \in S^1} P^1(\sigma_1, \sigma_2)$$

若记 $\inf_{\sigma_2 \in S^2} \sup_{\sigma_1 \in S^1} P^1(\sigma_1, \sigma_2) = v^+$，于是 $v_{\sigma_2}^* = -v^+$，类似，记 $\sup_{\sigma_1 \in S^1} \inf_{\sigma_2 \in S^2} P^1(\sigma_1, \sigma_2) = v^-$，此时称 v^-，$-v^+$ 分别为甲、乙的保守值(Conservative value)。由于在零和对策中只用 $P^1(\sigma_1, \sigma_2)$ 已足，为方便计略去上标，记作 $P(\sigma_1, \sigma_2)$，显见对任何 $\sigma_1 \in S^1, \sigma_2 \in S^2$，，总有

$$P^*(\sigma_1) = \inf_{\sigma_2 \in S^2} P(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant P(\sigma_1, \sigma_2)$$

$$\leqslant \sup_{\sigma_1 \in S^1} P(\sigma_1, \sigma_2)$$

$$= \overline{P}(\sigma_2) \qquad (2.1.3)$$

所以

$$v^- = \sup_{\sigma_1 \in S^1} \inf_{\sigma_2 \in S^2} P(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant \inf_{\sigma_2 \in S^2} \sup_{\sigma_1 \in S^1} P(\sigma_1, \sigma_2) = v^+ \qquad (2.1.4)$$

称区间 $[v^-, v^+]$ 为对策 Γ 的偶间距(dual gap)，它反映了两局中人保守值的差异。上式又可看作：$\forall\ \sigma_1 \in S^1, \sigma_2 \in S^2, P^*(\sigma_1) + (-\overline{P}(\sigma_2)) \leqslant 0$，即两局中人最坏收益之和非正。它表明双方都作最保守打算时，一部分利益便“浪费”了。此时

$$0 \geqslant v^- + (-v^+) = \sup_{\substack{\sigma_1 \in S^1 \\ \sigma_2 \in S^2}} (P^*(\sigma_1) + (-\overline{P}(\sigma_2)))$$

若上式成立，便有 $v^- = v^+$，或：甲的最小最大收益 $v^- = v^+ =$ 乙的

最小最坏损失。这是理想状态。此时引入以下定义：

定义 2.1.1 在二人零和对策 Γ 中，若甲的支付函数为 $P(\sigma_1,\sigma_2)$，设有值 v 使 $v^+=v^-=v$，则称对策 Γ 有鞍点(Saddle point)，其公共值 v 称为对策的值(value)，而称相应的策略对(σ_1^*，σ_2^*)为对策 Γ 的鞍点。

由于在二人零和对策中只用 $P(\sigma_1,\sigma_2)$便可表示支付，故将对策 Γ 改记为 $\Gamma=\langle S^1,S^2;P\rangle$.

为叙述方便，引入下述名词。若有元素 $\bar{\sigma}_1$ 使

$$\inf_{\sigma_2\in S^2} P(\bar{\sigma}_1,\sigma_2)=\inf_{\sigma_2\in S^2}\sup_{\sigma_1\in S^1} P(\sigma_1,\sigma_2)=v \tag{2.1.5}$$

称 $\bar{\sigma}_1$ 为 P 的 max－inf 策略。类似，若有元素 $\bar{\sigma}_2$ 使

$$\sup_{\sigma_1\in S^1} P(\sigma_1,\sigma_2)=\sup_{\sigma_1\in S^1}\inf_{\sigma_2\in S^2} P(\sigma_1,\sigma_2)=v \tag{2.1.6}$$

则称 $\bar{\sigma}_2$ 为 P 的 min－sup 策略。显然 P 的鞍点策略对(σ_1^*，σ_2^*)满足：

$$\inf_{\sigma_2\in S^2} P(\sigma_1^*,\sigma_2)=P(\sigma_1^*,\sigma_2^*)=\sup_{\sigma_1\in S^1} P(\sigma_1,\sigma_2^*) \tag{2.1.7}$$

反之亦然。所以可用(2.1.7)作为鞍点的另一定义，此时有

定理 2.1.1 策略对($\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2$)为鞍点的充要条件是 $\bar{\sigma}_1$ 为 max－inf 策略而 $\bar{\sigma}_2$ 为 min－sup 策略。

利用式(2.1.7)及(2.1.4)，不难证明(留给读者)。

再来考察非合作平衡点。由定义，若有策略对($\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2$)使 $P^1(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)=\max\limits_{\sigma_1\in S^1}P^1(\sigma_1,\bar{\sigma}_2)$ 及 $P^2(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)=\max\limits_{\sigma_2\in S^2}P^2(\bar{\sigma}_1,\sigma_2)$，但 $P^2(\bar{\sigma}_1,\sigma_2)=-P^1(\sigma_1,\sigma_2)=-P(\bar{\sigma}_1,\sigma_2)$，所以 $\max\limits_{\sigma_2\in S^2}P^2(\bar{\sigma}_1,\sigma_2)=-\min\limits_{\sigma_2\in S^2}P(\bar{\sigma}_1,\sigma_2)$. 因此，在二人零和对策中，非合作平衡策略对($\sigma_1,\sigma_2$)的定义便是：若有策略对($\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2$)满足：

$$\begin{cases} P(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)=\max\limits_{\sigma_1\in S^1} P(\sigma_1,\bar{\sigma}_2) \\ P(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)=\min\limits_{\sigma_2\in S^2} P(\bar{\sigma}_1,\sigma_2) \end{cases} \tag{2.1.8}$$

则$(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)$为对策的非合作平衡策略时。将此结果与(2.1.7)相比，显见当且仅当对策有值时，每一个保守策略对均为非合作平衡策略对。故对二人零和对策，不再区分它们(并把"非合作"一词略去)。至于 Pareto 最优，二人零和对策的任何策略对(σ_1,σ_2)都是 Pareto 最优，故对二人零和对策，就不讨论 Pareto 最优了。

关于平衡点，有以下结果。

定理 2.1.2 在二人零和对策$\Gamma=(S^1,S^2;P)$中，若(σ_1,σ_2)及(τ_1,τ_2)是两个平衡策略对，则

(i) (σ_1,τ_2)及(τ_1,σ_2)也都是平衡策略对；

(ii) $P(\sigma_1,\sigma_2)=P(\tau_1,\tau_2)=P(\sigma_1,\tau_2)=P(\tau_1,\sigma_2)$.

证 由于(σ_1,σ_2)是平衡(策略)对，所以$P(\sigma_1,\sigma_2)\geqslant P(\tau_1,\sigma_2)$，另一方面，$(\tau_1,\tau_2)$是平衡对，所以也有$P(\tau_1,\sigma_2)\geqslant P(\tau_1,\tau_2)$。于是

$$P(\sigma_1,\sigma_2)\geqslant P(\tau_1,\sigma_2)\geqslant P(\tau_1,\tau_2)$$

类似地

$$P(\tau_1,\tau_2)\geqslant P(\sigma_1,\tau_2)\geqslant P(\sigma_1,\sigma_2)$$

由此两式便推出定理中(ii)成立。

对于任何策略$\hat{\sigma}_1\in S^1$，依定义有

$$P(\hat{\sigma}_1,\sigma_2)\leqslant P(\sigma_1,\sigma_2)=P(\tau_1,\sigma_2)$$

同样，对任何$\hat{\sigma}_2\in S^2$，有

$$P(\tau_1,\hat{\sigma}_2)\geqslant P(\tau_1,\tau_2)=P(\tau_1,\sigma_2)$$

这就证明了(τ_1,σ_2)为平衡对，类似的(σ_1,τ_2)也是平衡对，(i)成立。证毕。

应当注意，该定理对非零和二人对策并不成立。

§2 二人零和有限对策的基本定理

所谓有限对策是指局中人的策略集分别为有限集。在二人零

和情况下，这类对策可用表格形式表示。若甲有 m 个策略，乙有 n 个策略，此时可列表如下：

乙／甲	1	2	……	j	……	n
1	$P(1,1)$	$P(1,2)$	……	$P(1,j)$	……	$P(1,n)$
2	$P(2,1)$	$P(2,2)$	……	$P(2,j)$	……	$P(2,n)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
j	$(P(i,1)$	$P(i,2)$	……	$P(i,j)$	……	$P(i,n)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
m	$P(m,1)$	$P(m,2)$	……	$P(m,j)$	……	$P(m,n)$

通常，这个表可用 $m\times n$ 矩阵的形式给出，矩阵的第 i,j，元素为 $P(i,j)$。依前讨论，用 $R^*(i)$表示甲采取第 i 个策略(即取矩阵的第 i 行)时甲所得的最坏效益，即 $R^*(i)=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}P(i,j)$，而甲的保守解应是：取 i 使

$$R^*(i)=\max_{1\leqslant j\leqslant m}\ \min_{1\leqslant j\leqslant n}P(i,j)$$

类似的，用 $C^*(j)$表示乙采取第 j 个策略时甲可得的最好效益，则乙的保守策略 $\bar{j}$ 是使

$$C^*(\bar{j})=\min_{1\leqslant j\leqslant n}\ \max_{1\leqslant i\leqslant m}P(i,j)$$

例 1　考虑对策

乙／甲	1	2	3
1	6	-2	3
2	-4	5	4

显然 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2}\ \min\limits_{1\leqslant j\leqslant 3}P(i,j)=-2$，而 $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 3}\ \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2}P(i,j)=4$.

例 2　考虑对策

甲 \ 乙	1	2	3
1	2	1	4
2	−1	0	6

显然$\max_{1\leqslant i\leqslant 2}\min_{1\leqslant j\leqslant 3}P(i,j)=1$，而$\min_{1\leqslant j\leqslant 3}\max_{1\leqslant i\leqslant 2}P(i,j)=1$.

以上两例说明，在例 1 中$\min_{1\leqslant j\leqslant 3}\max_{1\leqslant i\leqslant 2}P(i,j)\neq\max_{1\leqslant i\leqslant 2}\min_{1\leqslant j\leqslant 3}P(i,j)$，而在例 2 中它变成了等式，同时显见例 2 有鞍点而例 1 中对策不具有鞍点。那么，当对策的鞍点不存在时应如何处理？

今后为书写方便，记$P(i,j)=a_{ij}$，并记矩阵$(a_{ij})_{m\times n}$为 A，称它为支付矩阵。

不妨设想局中人甲、乙多次重复进行同一对策活动，在每次对策过程中，甲、乙分别随机地选取各自的策略，在多次进行之后再计算多次对策过程后双方的平均效益。这时甲可能以 x_1 的概率取其第一个策略，以 x_2 的概率取其第二个策略，…，以 x_m 的概率取其第 m 个策略。在多次对策过程中，甲采取的策略此时可记成向量 $x=(x_1,x_2,\cdots x_m)$，并称它为甲的“混合策略”(Mixed Strategy)，确切地说，即

定义 3.2.1 局中人甲的混合策略是指在他的策略集上的一个概率分布。具体说，在甲有 m 个策略的情况下，甲的混合策略是 m—维向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，它满足条件：

$$\begin{cases} x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m \\ \sum_{i=1}^{M}x_i=1 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

X 的全体的集合记作 X，它是 m 维空间的一个单纯形。

类似地可定义乙的混合策略为乙的策略集上的概率分布，它是 n 维向量 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$。其全体的集记作 Y，Y 是 n 维空间中的一个单纯形。

在甲的混合策略中有一类特殊的策略，它们是α_1，=(1,0,…,0)，α_2=(0,1,…,0)，…，α_m=(0,…,0,1)。它们对应于甲的策略集中原有的 m 个策略，称为甲的纯策略(Pure Strategy)。同样可定义乙的 n 个纯策略 $\beta_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)$，$i=1,2,\cdots,n$，其中 1 位于向量的第 i 个分量的位置上。今后，在不会引起误解的情况下，不论混合策略或纯策略，一律称为策略。

不难看出当甲选取策略 x、乙选取策略 y 时甲的期望收益为：

$$xAy^T=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i a_{ij} y_j \xlongequal{\text{def}} A(x,y) \tag{2.2.2}$$

式中 y^T 是 y 的转置，但今后在不引起误解时，把 $A(x,y)$ 记作 xAy，

此时对策含义已与原来对策不同，现在是在混合意义下来考虑的，故把它称为原对策的“混合扩张”(mixed extension)。仿照前面的记号，把对策 Γ 的混合扩张记作 $\Gamma=\langle X,Y;A\rangle$，以后为叙述方便，略去混合扩张一词，而称之为对策，有时简略地说“对策 A”。自然会问，对于 $\Gamma=\langle X,Y;A\rangle$，鞍点的概念是否可以推广？仿照前面的定义，引入

定义 2.2.2 对于 $\Gamma=\langle X,Y;A\rangle$，若有策略对$(\bar{x},\bar{y})$满足

$$A(x,\bar{y})\leqslant A(\bar{x},\bar{y})\leqslant A(\bar{x},y) \tag{2.2.3}$$

其中 $x\in X$，$y\in Y$，则称$(\bar{x},\bar{y})$，为 Γ 的(混合扩张意义下的)鞍点。

显然需要回答对策的混合扩张是否总存在鞍点？这是二人零和对策中的基本问题。

首先，不难看出对于任何定义在 $X\times Y$ 上的函数 $F(x,y)$，$x\in X$，$y\in r$ 总有

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}F(x,y)\leqslant\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}F(x,y) \tag{2.2.4}$$

这是因为对于任何 $y\in Y$，$\sup\limits_{x\in X}F(x,y)\geqslant F(x,y)$，因此$\inf\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x\in X}F(x,y)\geqslant\inf\limits_{y\in Y}F(x,y)$，由此立即可得(2.2.4)。

今后常把$\inf\limits_{y\in Y}$简写作$\inf\limits_{y}$，$\sup\limits_{x\in X}$简写作$\sup\limits_{x}$，余类推。

假若 X、Y 都是紧的，且 F 在 $X\times Y$ 上连续，则inf，sup可分别换作 min，max，于是上式改写为：

$$\max_{X}\min_{y}F(x,y)\leqslant\min_{y}\max_{X}F(x,y) \tag{2.2.5}$$

而鞍点的存在相当于问在式(2.2.4)或(2.2.5)中等式何时成立，或证上述两式中不等号可以反向，这就是 Von Neumann 的著名的最小最大定理(mini—max theorem)。它是一个基本定理，引起许多人的兴趣，证明方法很多，下面介绍几种。

第一种证法利用凸集分离定理，分离定理断言两个没有公共内点的凸集必存在一个超平面把它们分开。关于凸集及分离定理，读者可参阅论述凸分析方面的书，如关肇直：《线性泛函分析入门》。我们先由以下引理开始：

引理 2.2.1 若 S^m 是 R^m 中的单纯形，即对任何 $x\in S^m$，x 满足 $x_i\geqslant 0$，$i=1,2,\cdots,m$，$\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=1$，又设 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$为一固定向量，则

$$\max_{x\in S^m}\sum_{i=1}^{m}x_ib_i=\max_{1\leqslant i\leqslant m}b_i \tag{2.2.6}$$

证 显然$\max\limits_{i}b_i=\sum\limits_{j=1}^{m}x_j\max\limits_{i}b_i\geqslant\sum\limits_{j=1}^{m}x_jb_j$. 另一方面，$\max\limits_{i}b_i=b_{i_0}\leqslant\max\limits_{x}\sum\limits_{i=1}^{m}x_ib_i$. 证毕。

下面再给对策的策略作一几何解释。为此把支付矩阵 A 重新改写为：

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n}\\ a_{m1} & \cdots\cdots & a_{mn}\end{bmatrix}=(A_{\cdot 1},A_{\cdot 2}\cdots,A_{\cdot n})$$

这里 $A_{\cdot j}$表示 A 的第 j 列所构成的列向量，并把 $A_{\cdot j}$看作 m 维空间中的 n 个点。现用 G 表示 R^m 中由诸向量 $A_{\cdot j}$，$j=1,2,\cdots,n$ 张成的凸集，即：

$$G=\{\sum_{j=1}^{M}y_jA_{\cdot j}|\sum_{j=1}^{N}y_j=1,y_j\geqslant 0,j=1,\cdots,n\} \quad (2.2.7)$$

注意 G 中的向量 P 的第 i 个分量即

$$P_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j=(A_y)_i$$

再考虑实数 λ，它们是某向量 P 的诸分量的上界。即对此 λ 若存在 $P\in G$ 使 $P_i\leqslant\lambda,i=1,2,\cdots,m$ 成立，则称 λ 为宜取的。把所有这样的数 λ 的集记作 Ω，易见 Ω 非空。因为若有 $N>a_{ij},i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$，那么 $N\in\Omega$。其次，若 N 充分大，则 Ω 有下界为 $-N$. 即数集 Ω 有下界，记 $\lambda_0=\inf\limits_{\lambda\in\Omega}$ 入，可证 λ_0 为宜取，换言之 $\lambda_0\in\Omega$. 因若选取序列 $\{\lambda_n\}\in\Omega$，并使 $\lambda_n\to\lambda_0$，因对每个 λ_n 均为宜取，依宜取定义，至少有一个向量 $q^{(n)}\in G$ 使 $q_i^{(n)}\leqslant\lambda_n$，由前述显见 G 是紧的，所以序列 $\{q^{(n)}\}$ 至少有一个极限点 $q^{(0)}\in G$，由此立知 $q_i^{(0)}\leqslant\lambda_0$，所以 λ_0 为宜取的。

现考虑集合 O_{λ_0} 如下：

$$O_{\lambda_0}=\{q|q_i\leqslant\lambda_0,i=1,2,\cdots,m\} \quad (2.2.8)$$

不难看到 O_{λ_0} 只和集 G 相接触但不重迭。事实上，$O_{\lambda_0}\cap G\supset q^{(0)}$，但 O_{λ_0} 的内部却不含有 G 的点，因否则将与 λ_0 的含义矛盾。

现在已构造了两个凸集：G 和 O_{λ_0}(请读者自己验证)。而凸集的分离定理断言：两个没有公共内点的凸集必存在一张超平面把它们分开。所以对于集 O_{λ_0}，可作它的支撑超平面，使集 O_{λ_0} 完全位于超平面的一边。假设 ξ 为 R^m 中的点，可作超平面：

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_i\xi_i+\mu_0=0,\sum_{i=1}^{m}|\mu_i|\neq 0 \quad (2.2.9)$$

并设此平面的法线方向是指向远离 O_{λ_0} 一侧的。因而对于 O_{λ_0} 中的每一个 ξ，对此超平面必满足

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_i\xi_i+\mu_0\leqslant 0 \quad (2.2.10)$$

并且在 O_{λ_0} 中存在一点 $\xi^{(0)}$ 使等式成立。可证诸系数 μ_i 满足

$$\mu_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,m, \sum_{i=1}^{m}\mu_i > 0$$

$$\mu_0 = -\lambda_0\sum_{i=1}^{m}\mu_i \qquad (2.2.11)$$

事实上，μ_i 的非负性可通过将点 $\xi=(\lambda_0,\cdots,\lambda_0-N,\cdots,\lambda_0)$ 代入(2.2.10)中得到。其中 $-N$ 是 ξ 的第 i 个分量，而 $\xi_j=\lambda_0, j\neq i$，并且 N 充分大。又由于(2.2.9)定义一个超平面，而诸 μ_i 非负，故有 $\sum_{i=1}^{m}\mu_i>0$，又因 O_{λ_0} 的支撑平面必过顶点 $\xi=(\lambda_0,\cdots,\lambda_0)$，所以 $(\sum_{i=1}^{m}\mu_i)\lambda_0+\mu_0=0$，从而得出(2.2.11)中的第三式。反之，不唯证明满足(2.2.11)的任何 μ_i 的集，可确定 O_{λ_0} 的一个支撑超平面，并且平面的法线指向不含 O_{λ_0} 的一边。

在支撑平面方程两边同时除以 $\sum_{i=1}^{m}\mu_i$，并令 $x_i=\mu_i/\sum_{i=1}^{m}\mu_i$，$O_{\lambda_0}$ 的支撑平面方程可改写作：

$$\sum_{i=1}^{m}x_i\xi_i - \lambda_0 = 0 \qquad (2.2.12)$$

其中 $\sum_{i=1}^{m}x_i=1$，且 $x_i\geqslant 0$，此时可设想甲的策略 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 含在单纯形 S^m 中，即满足 $x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m, \sum_{i=1}^{m}x_i=1$，并由它可构成集 O_{λ_0} 的支撑平面(2.2.12)，反之亦然。但另一方面，乙的策略 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，它含在另一单纯形 T^n 之中，却对应于 G 中的点。因为对 y，可伴随地给出分量为 $P_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j$ 的点 $P=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$。不幸的是 Y 到 G 的对应并非一对一的，因为若 A 的秩小于 n 时 Y 的子集便映到 G 中，反之亦然。

由以上讨论，将支付 $A(x,y)$ 看作 x 与 Ay 的内积，即 $A(x,y)$

$=(x,Ay)$，这里 Ay 由 y 确定，且为 G 中的点。此时可证：

定理 2.2.2（Min－max 定理） 对于 $\Gamma=(X,Y;A)$，有

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X}A(x,y)=\max_{x\in X}\min_{y\in Y}A(x,y)=v \qquad (2.2.13)$$

其中 v 为 Γ 的值。

证 先构造上面所述的凸集 O_{λ_0} 及 G. 因 O_{λ_0} 与 G 不重迭，由凸集分离定理，存在超平面 H 将它们分开。由于 O_{λ_0} 与 G 相接触，故分离平面也是支撑平面，且其法线指向不含 O_{λ_0} 的一边。设此平面的法线方向数为 x_i^0，$i=1,2,\cdots,m$. 并对一切 $\xi\in O_{\lambda_0}$，有 $\sum_{i=1}^{m}x_i^0\xi_i-\lambda_0\leqslant 0$. 另一方面对一切 $\eta\in G$，有 $\sum_{i=1}^{m}x_i^0\eta_i-\lambda_0\geqslant 0$. 若 y 为任何已给策略，则它所对应的向量 $\eta\in G$，且分量 $\eta_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j$，从而对一切 $y\in Y$ 有

$$A(x^0,y)=\sum_{i=1}^{m}x_i^0\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j\right)\geqslant\lambda_0$$

但若用 y^0 记使 $P\in G\cap O_{\lambda_0}$ 的策略，则 $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}y_j^0\leqslant\lambda_0$，而由引理 2.2.1，却又推出对一切 $x\in X$，$A(x,y^0)\leqslant\lambda_0$，由此可知存在 (x^0,y^0) 使

$$A(x,y^0)\leqslant A(x^0,y^0)\leqslant A(x^0,y) \qquad (2.2.14)$$

证毕。

第二个证法利用函数的凸性及不动点原理，这里假设函数连续。

定理 2.2.3 设 $F(x,y)$ 是定义在 $(x,y)\in C\times D$ 上的连续实值函数，其中 C、D 都是闭、有界、凸集。又设对每个 x，F 是 y 的凸函数，而对每个 y，F 是 x 的凹函数，则

$$\min_{y\in D}\max_{x\in C}F(x,y)=\max_{x\in C}\min_{y\in D}F(x,y) \qquad (2.2.15)$$

证 对每个 x，定义 $\Phi_X(y)=F(x,y)$，并令

$$B_x = \{\bar{y} | \Phi_x(\bar{y}) = \min_{y\in D}\Phi_x(y)\} \qquad (2.2.16)$$

易知 B_X 非空，闭且凸，B_x 为凸是 F 为 y 的凸函数的推论。再对每个 y 定义 $\psi_y(x)=F(x,y)$，并令

$$A_y = \{\bar{x} | \psi_y(\bar{x}) = \max_{x\in c}\psi_y(x)\} \qquad (2.2.17)$$

同样知 A_y 非空，闭且凸。再记 $E=C\times D$，由于 C、D 均为凸集，故其直积 E 也是凸集。设映射

$$g: C \times D \to A_y \times B_x$$

由于 A_y、B_x 非空，且分别为 C、D 的凸子集，故 $A_y\times B_x$ 也非空、闭，且是 E 的凸子集。此时可利用 Kakutani 的不动点原理。此定理断言：若 E 是一个闭单纯形，且 f 为上半连续映射，它将 E 的每一点映射为 E 的一个闭凸子集，则存在点 $\xi\in E$ 使 $\xi_0\in f(\xi_0)$，可验证 E，g 都满足 Kakutani 定理中所要求的条件，因此存在点 $(x^0,y^0)\in Ay^0\times B_x{}^0$，即

$$F(x^0,y^0) \geqslant F(x,y^0), \forall\ x \in C$$
$$F(x^0,y^0) \leqslant F(x^0,y), \forall\ y \in D$$

由此推出：

$$\min_y \max_x F(x,y) = \max_x \min_y F(x,y)$$

证毕。

由此可知对策 $\Gamma=(C,D;F)$ 具有对策值。

上面的证明要用到不动点原理。但这个定理有一个初等证明，它充分利用所给函数的几何性质。先假设对每个 x，F 是 y 的严格凸函数，对每个 y，F 是 x 的严格凹函数。由 F 为 y 的严格凸函数，故存在唯一的 $y(x)$ 使

$$F(x,y(x)) = \min_y F(x,y) \overset{\text{def}}{=\!=} m(x) \qquad (2.2.18)$$

由于 F 为一致连续，且 $y(x)$ 为唯一，故 $m(x)$ 及 $y(x)$ 连续。又因为凹函数族的极小函数仍是凹的，所出 $m(x)$ 为凹的。设 x^* 为使凹函数 $m(x)$ 取极大的点，即

$$m(x^*) = \max_x m(x) = \max_x \min_y F(x,y) \qquad (2.2.19)$$

比较 x^* 附近的点处 F 的性态。设 $x \in C$ 及 $t \in [0,1]$，由 F 关于 x 严格凹的假设，有

$$F((1-t)x^* + tx, y) > (1-t)F(x^*, y) + tF(x,y)$$
$$\geqslant (1-t)m(x^*) + tF(x,y)$$

令 $\tilde{y} = y((1-t)x^* + tx)$，所以在上式两端取 $y = \tilde{y}$，有

$$m((1-t)x^* + tx) \geqslant (1-t)m(x^*) + tF(x, \tilde{y})$$

但因对一切 $x \in C, m(x^*) \geqslant m(x)$，于是 $m(x^*) \geqslant m((1-t)x^* + tx)$，从而

$$F(x, \tilde{y}) \leqslant m(x^*) = F(x^*, y(x^*))$$

令 $t \to 0$，于是 $(1-t)x^* + tx \to x^*$，且 $\tilde{y} \to y(x^*)$。由此推知对任何 x，有 $F(x, y(x)^*) \leqslant F(x^*, y(x^*))$. 若令 $y(x^*) = y^*$，以及 $v = F(x^*, y^*)$ 注意 $y(x)$ 的构造方式，便得

$$F(x, y^*) \leqslant v \leqslant F(x^*, y) \qquad (2.2.20)$$

此式等价于 min－max 定理。

下面把严格凸或凹的条件放宽，为此定义：

$$F_\epsilon(x,y) = F(x,y) - \epsilon f(x) + \epsilon g(y) \qquad (2.2.21)$$

其中 $f(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2, g(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j^2$. 于是每个 F_ϵ 均满足所说的严格凸或凹的要求。由前面的讨论便知对一切 $(x,y) \in C \times D$，有

$$F(x, y_\epsilon) - \epsilon f(x) \leqslant F_\epsilon(x, y_\epsilon) \leqslant v_\epsilon \leqslant F_\epsilon(x_\epsilon, y) \leqslant F_\epsilon(x_\epsilon, y) + \epsilon g(y)$$

再令 $\epsilon \to 0$，并注意 $x_\epsilon \to x^*, y_\epsilon \to y^*, v_\epsilon \to v$，便推出

$$F(x, y^*) \leqslant v \leqslant F(x^*, y).$$

定理证毕。

对矩阵对策 $\Gamma = (X, Y; A)$，可用下面一个颇为巧妙的方法证明 mini－max 定理。为此，记以 A 为支付矩阵的对策 Γ 的值为 $v(A)$，此外，设 $k_j(x) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i, h_i(y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, j = 1, 2, \cdots, n, i =$

$1,2,\cdots,m$. 注意$\min\limits_y A(x,y)$是甲的最坏收益，但 $A(x,y)$是 y 的线性函数，对给定的 x，$\min\limits_y A(x,y)$应在单纯形 Y 的一个端点处取到，即在一个对应于乙的某纯策略的单位向量处取到，所以对于乙、当甲选定 x 后甲的最坏情形是$\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} k_j(x)$，这比讨论$\min\limits_y A(x,y)$方便些，因为此时只须在有限集中挑选 j. 类似地，考虑乙的最坏情形，在给定 y 后只须注意$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} h_i(y)$，此时甲的保守值是在条件$\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} k_j(x)$之下选择最好策略时的所得，也即 $v^-(A)=\max\limits_{X\in X}\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} k_j(x)$，并称它为对策的下值(Lower value，也记作 $\underline{v}(A)$)。类似记对策的上值(Upper value)$v^+(A)=\min\limits_{y\in Y}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} h_j(y)$，$v^+(A)$也记作 $\bar{v}(A)$，而当 $v^+(A)=v^-(A)$时，便称它们的共公值为对策的值，记作 $v(A)$，当然一般 $v^+(A)\geqslant v^-(A)$，现记 $\text{gap}(A)=v^+(A)-v^-(A)$，则 mini—max 定理是说 $\text{gap}(A)=0$，现从此角度证明定理，此时先注意如下事实：

引理 2.2.4 若 A 至少有一个元素，则必存在某行或某列，当把它删去后矩阵中剩下元素构成的矩阵记作 $\hat{A}$ 时，它使

$$\text{gap}(\hat{A})\geqslant\text{gap}(A) \tag{2.2.22}$$

若引理成立，那么只要重复使用引理 $m+n-2$ 次，A 便蜕化为 1×1 的矩阵，此 1×1 矩阵的 gap 显然是零，由(2.2.22)，随着不断删除的过程，$\text{gap}(A)$不会变小，所以必有 $\text{gap}(A)=0$.

引理的证明。设 x^*、y^*分别为甲、乙的保守策略，则

$$\begin{cases} h_i(y^*)\leqslant v^+(A), & i=1,2,\cdots,m \\ k_j(x^*)\geqslant v^-(A), & j=1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{2.2.23}$$

此时有两种情形：假如(2.2.23)中对一切 i 及 j，等式均成立，则

$$v^+(A)=\sum_{i=1}^{m} x_i^* h_i(y^*)=A(x^*,y^*)$$

$$=\sum_{j=1}^{n} y_j^* k_j(x^*)=v^-(A)$$

故 gap$(A)=0$，当然对它的任何子矩阵 $\hat{A}$，必满足(2.2.23)。

另一种情形是(2.2.23)中至少有一个是不等式，不失一般性可设 $k_n(x^*)>v^-(A)$，现把 A 的第 n 列删去而构成 A 的子矩阵 $\hat{A}$。可证此时有 $v^+(\hat{A})\geqslant v^+(A)$，$v^-(\hat{A})\leqslant v^-(A)$。它们便构成(2.2.22)，现设 $\hat{x}^*$ 及 $\hat{y}^*$ 分别为甲、乙关于 $\hat{A}$ 的保守策略。由于 $\hat{y}^*$ 仅为 $n-1$ 维向量，此时定义一个 n 维向量 $\hat{y}^*=(\hat{y}_1^*,\cdots,\hat{y}_{n-1}^*,0)$，于是

$$v^-(\hat{A})=\max_i \hat{h}_i(\hat{y}^*)=\max_i h_i(\hat{y}^*)$$
$$\geqslant \min_y \max_i h_i(y)=v^+(A)$$

即 $v^+(\hat{A})\geqslant v^+(A)$，现在剩下要证 $v^-(\hat{A})\leqslant v^-(A)$。为此，设 $0<\varepsilon<1$，把 x^* 与 $\hat{x}^*$ 用 ε 组合起来，即设 $x^\varepsilon=(1-\varepsilon)x^*+\varepsilon\hat{x}^*$。由于单纯形 X 是凸集，x^ε 为混合策略。此时若设 $v^-(\hat{A})>v^-(A)$，将会导出矛盾。事实上，对于 $j=1,2,\cdots,n-1$，有

$$k_j(x^\varepsilon)=(1-\varepsilon)k_j(x^*)+\varepsilon k_j(\hat{x}^*)$$
$$=k_n(x^*)+\varepsilon(k_n(\hat{x}^*)-k_n(x^*)),$$

由于前设 $k_n(x^*)>v^-(A)$，所以取 ε 充分小时可保证 $k_n(x^\varepsilon)\geqslant v^-(A)$，此与 $v^-(A)=\max\limits_x \min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} k_j(x)$ 的定义相矛盾。所以 $v^-(\hat{A})>v^-(A)$ 不成立，从而 $v^-(\hat{A})\leqslant v^-(A)$。证毕。

由此引理立即推出矩阵对策的 min—max 定理成立。

今后，对于值为 v 而支付函数为 $A(x,y)$ 的对策，凡使 $A(x^*,y)\geqslant v$，$y\in Y$ 的策略 x^*，称为甲的优策略(Optimal Strategy)，而凡使 $A(x,y^*)\leqslant v$，$x\in X$ 的策略 y^*，称为乙的优策略，v 称为对策值。

§3 矩阵对策的优策略的性质

为讨论矩阵对策的计算方法和其他一些问题，有必要讨论优

策略的性质。为方便起见，记支付矩阵为 A，甲的优策略集为 X^0，乙的优策略集为 Y^0，对策值记作 $v(A)$或 v.

下面列出有关性质。

性质 1 每个局中人的优策略集是一闭凸集。

证明略（留给读者）。

性质 2 若 y^* 是乙的混合优策略，并设 $y^*_{j_0}>0$，则对甲的任何优策略 x，必有

$$A(x,j_0)=\sum_{i=1}^{n}x_i a_{ij_0}=v, \qquad (2.3.1)$$

式中 $A(x,j_0)$表示甲取策略 x、乙取纯策略 β_{j_0} 时的支付。

证 x 为优策略，对乙的任何纯策略 $\beta_r=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$，（其中 1 位于第 r 个位置处），可得：

$$\sum_{i=1}^{m}x_i a_{ir}\geqslant v, r=1,2,\cdots,n \qquad (2.3.2)$$

若式中严格不等式当 $r=j_0$ 时成立，则由 $y^*_{j_0}>0$，便有

$$y^*_{j_0}\sum_{i=1}^{m}x_i a_{ij_0}>vy^*_{j_0}$$

而对于 $r\neq j_0$，有

$$y^*_r\sum_{i=1}^{m}x_i a_{ir}\geqslant vy^*_r$$

所以

$$\sum_{r=1}^{n}y^*_r\sum_{i=1}^{m}x_i a_{ir}>v\sum_{r=1}^{m}y^*_r=v$$

而此与 y^* 为优策略矛盾。故对一切优策略 x，必有 $\sum_{i=1}^{m}x_i a_{ij_0}=v$. 证毕。

性质 2 中甲、乙的地位互换，可写出相似的结果（留给读者）。

性质 3 设 v 为对策值，x^* 为甲的任何优策略，又若对某个 j_0，有

$$A(x^*, j_0) > v \tag{2.3.3}$$

则对乙的任何优策略 y^*，必有 $y^*_{j_0}=0$。

证明仿性质 2。

还可猜想其逆也成立，即

性质 4 设 v 为对策值，若对乙的任何优策略 y^* 有 $y^*_{j_0}=0$，则甲必有一个优策略 x^* 使得

$$A(x^*, j_0) > v$$

为证此性质，还需以下之 Farkas 引理，为此先引入以下定义。

定义 2.3.1 设 $z^k=(z^k_1,\cdots,z^k_n)$，$k=1,2,\cdots,p$ 为 p 个 n 维向量，则称如下向量 x 的集。

$$C=\left\{x \mid x=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k z^k, \lambda_k\geqslant 0, k=1,2,\cdots,p\right\} \tag{2.3.4}$$

为此 $z^1,\cdots,z^p$ 生成的凸锥。

易于验证这个锥是凸的。

引理 2.3.1 设 $z^k=(z^k_1,\cdots,z^k_n)$，$k=1,2,\cdots,p$ 为 n 维向量，若它们对任何满足不等式 $W(z^k)^T\geqslant 0$ 的向量 $W=(w_1,\cdots,w_n)$ 必能推出 $Wz^T\geqslant 0$，则 z^T 必属于由 $z^1,\cdots,z^k$ 生成的凸锥 C，其中 $(z^k)^T$ 及 z^T 分别为 z^k 及 z 的转置。

证 假设 $z\notin$ 凸锥 C，则由分离定理，必存在一个向量 W 及实数 d，使得

$$Wz^T=\sum_{j=1}^{n}w_j z_j=d$$

以及对任何 $U\in C$，有

$$WU^T=\sum_{j=1}^{n}W_j u_j>d \tag{2.3.5}$$

现在 $0\in C$，所以 $d<0$，现设有 $S\in C$ 存在使 $WS^T>d$，但却使 $WS^T<0$，取充分大的正数 t 乘以 S，则 $tS\in C$，并可确信 $W(tS)^T$ 小于任何给定的负数（只要 t 足够大），特别它可小于 d，即 $W(tS)^T<d$，但此与(2.3.5)矛盾，故必有 $z\in C$，证毕。

现证性质 4　不失一般性，可设 $v=0$，因若 $v\neq 0$，只须在支付矩阵 $A=(a_{ij})$ 中，用 $(a_{ij})-v$ 代替 (a_{ij}) 而得一新对策，此对策与原对策有相同的优策略集，只不过对策值变为零而已。

考虑由如下 $m+n-1$ 个向量生成的凸锥 C，这些向量是 $e_1=(1,0,\cdots,0), e_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,e_m=(0,0,\cdots,1), A_{\cdot j}=\begin{pmatrix}a_{ij}\\ \vdots \\ a_{mj}\end{pmatrix}, j\neq j_0$，这时，对于 $-A_{\cdot j_0}$，或有 $-A_{\cdot j_0}\in C$，或有 $-A_{\cdot j_0}\notin C$，设若 $-A_{\cdot j_0}\in C$，则存在 $n+m-1$ 个非负实数 $\mu_1,\cdots,\mu_m,\lambda_j, j\neq j_0$，使得

$$-A_{\cdot j_0}=\sum_{i=1}^{m}\mu_i e_i+\sum_{j\neq j_0}\lambda_j A_{\cdot j} \qquad (2.3.6)$$

改用坐标表示，即对 $i=1,2,\cdots,m$，有

$$-a_{ij_0}=\mu_i+\sum_{j\neq j_0}\lambda_j a_{ij}$$

这表明

$$\sum_{j\neq j_0}\lambda_j a_{ij}+a_{ij_0}=-\mu_i\leqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,m$$

用 $1+\sum_{j\neq j_0}\lambda_j$ 除上式两边，并令

$$y_j^*=\frac{\lambda_j}{1+\sum_{j\neq j_0}\lambda_j},\qquad y_{j_0}^*=\frac{1}{1+\sum_{j\neq j_0}\lambda_j} \qquad (2.3.7)$$

便得 $A(i,y^*)\leqslant 0=v, i=1,2,\cdots,m$，所以 y^* 是乙的优策略，并且 $y_{j_0}^*>0$. 但此非性质 4 所假设的情形，所以应再考察 $-A_{\cdot j_0}\notin C$. 由 Farkas 引理，存在向量 $W=(w_1,\cdots,w_m)$ 使得 $we_i^T\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m, wA_{\cdot j}\geqslant 0, j\neq j_0$，但却有 $-WA_{\cdot j_0}<0$. 由 $We_i^T\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m$，推出 $w_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,m$，而由 $-WA_{\cdot j_0}<0$ 推出 $W\neq 0$，所以必有 $\sum_{i=1}^{m}w_i>0$. 用它作除数，并令

$$\begin{cases} x_i^* = \dfrac{w_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} w_i}, i = 1,2,\cdots,m \\ x^* = (x_1^*,\cdots,x_m^*) \end{cases} \tag{2.3.8}$$

便得 $A(x^*,j)\geqslant 0, A(x^*,j_0)>0$，所以 x^* 必为甲的优策略，且 $A(x^*_{j_0})>0$，证毕。

今后为方便起见，若策略 x 的第 i 个分量 $x_i>0$，便称甲的第 i 个纯策略与策略 x 有关，也即 x 含有纯策略 α_i 的成分。在讨论中有时也交互使用第 i 行或第 i 个纯策略 α_i 或纯策略 i 等说法。若第 i 个纯策略使 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}y_i=v$，便说第 i 个纯策略是关于策略 y 的一个"平衡因子"。所以性质 2 可重新叙述为：若第 i 个纯策略与优策略 x^* 有关，则纯策略 i 对于乙的任何优策略 y，都是一个平衡因子。关于优策略 y 的类似术语或说法，仿此建立。同样，性质 3，4 也均可用平衡因子的语言加以叙述。

最后，本书常使用记号 $A\boldsymbol{y}=\boldsymbol{V}$，其中 y 是策略（向量），$\boldsymbol{V}=(v,v,\cdots,v)$ 也是向量，其中 v 为支付向量为 A 的对策的对策值。类似可理解 $Ay\leqslant \boldsymbol{V}, x\boldsymbol{A}\geqslant \boldsymbol{V}$ 等等含义。

下面利用优策略的性质来分析策略的优劣和选取。从人的行为规律看，人们在做事时总是选取好的方法，"扬长避短"，"去劣存优"。在选取策略时也是如此，下面先来比较策略的优劣。

定义 2.3.2 两个 n 维向量 $\alpha=(\alpha_1\cdots,\alpha_m)$，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，若对一切 i，均有 $\alpha_i>\beta_i$，则称 α 严格优于 β（或称 α 严格控制 β，有时也称 α 严格超过 β）。

现在考察矩阵对策的策略优劣，其中设对策 $\Gamma=(X,Y;A)$ 的值为 v.

定理 2.3.2 若对策的支付矩阵 A 的第 j 行严格优于第 i 行，则第 i 行可由 A 中删去而不会改变局中人甲的优策略集。

证 对于乙的优策略 y^*，显然有 $v \geqslant \sum_K a_{jk} y_k^* > \sum_K a_{ik} y_k^*$，由性质 3 中相应于甲的情况，可知不存在甲的优策略 x^* 而使 $x_i^* > 0$，即第 i 行可由 A 中删去而不影响甲的优策略的选取。证毕。

说明 对于乙也有类似结果，即：若第 j 列严格的超过第 i 列，则第 j 列可从矩阵 A 中删去而不影响乙的优策略的选取。在推证此结果时只须注意在零和对策中甲的所失便是乙的所得即可。

定理 2.3.3 若矩阵的第 i 行严格的被其余各行的凸组合所超过，则第 i 行可从矩阵 A 中删去而不影响甲的优策略集。

相应地，若矩阵第 j 列严格超过其他各列的凸组合，则第 j 列可从矩阵 A 中删去而不影响乙的优策略集。

定理 2.3.4 若行中的某集合 R_1 的一个凸组合严格超过行的另一集合 R_2 的某凸组合，则在 R_2 中必存在一个可以删去的行。

相应地，若列中的某集合 C_1 的一个凸组合严格超过列的另一集合 C_2 中列的某一凸组合，则 C_1 中必存在一列可从 A 中删去。

以上两个定理都不难证明（留给读者）。

定理 2.3.5 若矩阵 A 可写作分块矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

若 A_2 中每一列严格超出 A_1 中列的某个凸组合，又设 A_3 中每一行严格的被 A_1 中行的某个凸组合超出，则 A_2、A_3、A_4 均可删去而不影响甲、乙的优策略集。

证 假设 A_3 的第 i 行被甲的某个优策略 x^* 以正概率 λ 所采用，由于 A_1 的行的某个凸组合严格优于 A_3 的第 i 行。此时可按 A_1 中行的凸组合中各行的权的比例把 λ 分配到 A_1 的各行中。这样得到一个新的策略 x^0. 依次把 A_3 中凡与优策略 x^* 有关的行都进行操作，最后便得到一个新策略 $\bar{x}$. 显然当局中人甲采用 x 而乙

采用对应于 A_1 中列的纯策略时，所得的期望支付一定会大于甲采用 x^*，而乙采用 A_1 中前述同一列代表的纯策略时所得的期望，即

$$(\bar{x}, A\beta_j) > (x^*, A\beta_j) \geqslant v \tag{2.3.9}$$

式中 β_j 是对应于 A_1 中第 j 列的纯策略。

对 A_2 的任一列 l，由假设在 A_1 中存在一个凸组合 y^0 使之严格的被 A_2 的 l 列超过。此时把 A_2 中各列均设为零并补充到 y^0 中，使 y^0 成为乙的一个策略，可推知对于 A_2 中的第 l 列，有

$$(\bar{x}, A\beta_l) > (\bar{x}, Ay^0) = (\bar{x}A, y^0) \geqslant v \tag{2.3.10}$$

上面最后的不等式是由(2.3.9)推出的。由(2.3.9)(2.3.10)可知对 A 的任何一列 j，都有$(\bar{x}, A\beta_j) > v$. 当然对乙的任何优策略 y^*（它是由 A 的各列构成的一个凸组合），也有$(\bar{x}, Ay^*) > v$. 这与 v 为对策值的含义矛盾。所以 A_3 中决不会有任何一行以正概率而为甲的优策略采用。类似地可证 A_2 中任何列不会为乙的任何优策略所采用。定理证毕。

上述定理是用严格不等式给出的，实际上也可用于非严格优于或非严格超出，也即可用于“$\geqslant$”的情形。采用上述方法后，一个矩阵对策可蜕化为一个新的更简单的矩阵对策。对新对策求解后，只要记住原来的矩阵中删去的是哪几行、哪几列，把删去的行、列所对应的分量记作零，添加到新的对策的最优解向量中去，便得到原对策的最优策略向量。

策略的优劣比较还可采取以下的定义。

定义 2.3.3 在对策 $\Gamma = (X, Y; A)$ 中，若甲的两个策略 x^1 及 x^2 以及乙的任何纯策略 β_j，均有

$$(x^1, A\beta_j) \geqslant (x^2, A\beta_j) \tag{2.3.11}$$

则称 x^1 优于 x^2. 类似，对乙的两个策略 y^1，y^2 及甲的任何纯策略 α_i，都有

$$(\alpha_i A, y^1) \leqslant (\alpha_i A, y^2) \tag{2.3.12}$$

则称 y^1 优于 y^2.

在以上定义中把"≥"、"≤"换作">"、"<",便称为"严格"优于。

例 1　讨论如下之对策,其支付矩阵 A 为:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

解　显然第 4 列的各元素严格大于第 2 列中相应元素,故由定理 2.3.2,第 4 列可删去,矩阵变作:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

在此新矩阵中第 3 行各元素严格大于第 1 行相应各元素,故此矩阵中第 1 行可删去,得另一矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

而此新矩阵中第 3 列又严格超过第 2 列,所以第 3 列应删去,剩下的元素形成如下 2×2 矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

此矩阵对策的解为:甲的优策略为$(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$,乙的优策略为$(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$,对策值 $v=7/4$,考虑到所删去的行和列,故原对策中甲的优策略是$(0,\frac{3}{4},\frac{1}{4})$,乙的优策略是$(\frac{1}{4},\frac{3}{4},0,0)$,对策值 $v=7/4$.

例 2　讨论对策,其支付矩阵 A 为:

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

解　第 1 行显然比第 5 行相应各元素小，故第 1 行删去，剩下矩阵中第 1 列显然超出最后两列的各以 1/2 为权的组合，故第 1 列删去。所得新矩阵可以视作分块矩阵：

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 3 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & -1 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 6 & -2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

其中 A_1、A_2、A_3、A_4 都是 2×2 矩阵，应用定理 3.3.5，可知 A_2、A_3、A_4 均可删去，因而剩下一个 2×2 矩阵

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

解此新矩阵所表示的对策，甲的优策略为$(\frac{3}{8},\frac{5}{8})$，乙的优策略为$(\frac{3}{8},\frac{5}{8})$，对策值 $v=-\frac{1}{8}$. 考虑到所删去的行与列，原对策中甲的优策略为$(0,\frac{3}{8},\frac{5}{8},0,0)$，乙的优策略也是$(0,\frac{3}{8},\frac{5}{8},0,0)$，对策值 $v=-\frac{1}{8}$.

§4　优策略的计算及一些特殊对策

怎样找出局中人的最优策略是局中人最关心的问题之一。假如对策有鞍点，应先寻求鞍点。若不存在鞍点，可用 §3 中策略择优原则把支付矩阵化简。然后可按下面所介绍的方法求解。

1. $2\times n$ 矩阵对策的解法

当支付矩阵为 $2\times n$ 时可采用几何作图或代数方法求解。设对策的支付矩阵为：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix}$$

此时局中人甲的策略可只用一个变量 $x(0\leqslant x\leqslant 1)$ 描述，这里 x 表示甲取第 1 个纯策略(即第 1 行)的概率。若乙采取纯策略 β_j，则甲的期望支付可表示作 $l_j(x)=xa_{1j}+(1-x)a_{2j}$，此时令

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \text{诸 } l_j(x)(j=1,2\cdots,n) \text{ 的下方包络} \\ &= \inf_{1\leqslant j\leqslant n} l_j(x) = \min_j l_j(x) \qquad (2.4.1) \end{aligned}$$

再设 x_0 为 $\varphi(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 中的极大点，即 $\varphi(x_0)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\varphi(x)$，此 $\varphi(x_0)$ 便是甲选取 x_0 而乙选取任何纯策略时的最大期望支付。因乙的任何混合策略是其纯策略的凸组合，故支付也是诸 $l_j(x)$ 的凸组合。由于甲选取 x_0 时应使他在所有情况下至少能得到总量为 $v^*=\varphi(x_0)$，所以若对策值为 v，则必有 $v\geqslant v^*$.

注意 $l_j(x)=xa_{1j}+(1-x)a_{2j}=(a_{1j}-a_{2j})x+a_{2j}$ 的几何意义是 $x-l$ 平面上的一条直线。

下面分析乙的策略选取。

(1)若 $\varphi(x)$ 的极大点 x_0 为单位区间中的内点，此时必存在直线 l_{j_0} 通过点 $(x_0,\varphi(x_0))$，若 l_{j_0} 的斜率为零，则乙取纯策略 β_{j_0}，若过点 $(x_0,\varphi(x_0))$ 不存在上述水平直线，则必存在两直线 l_{j_0} 及 $l_{j_0}^*$ 过点 $(x_0,\varphi(x_0))$，其中一条斜率为正，另一斜率为负，以此两直线为基础，作出过此两直线交点 $(x_0,\varphi(x_0))$ 的水平直线 l^*. 换言之，选取权 $\lambda_0(0<\lambda_0<1)$ 使直线 $l^*=\lambda_0 l_{j_0}(x)+(1-\lambda_0)l_{j_0}^*$ 的斜率为零，也即令

$$\lambda_0 l_{j_0}(x)+(1-\lambda_0)l_{j_0}^*(x)=v^*=\varphi(x_0)$$

求出 λ_0 后，乙的一个混合策略便是 $(0,\cdots,\lambda_0,\cdots,1-\lambda_0,\cdots 0)$，

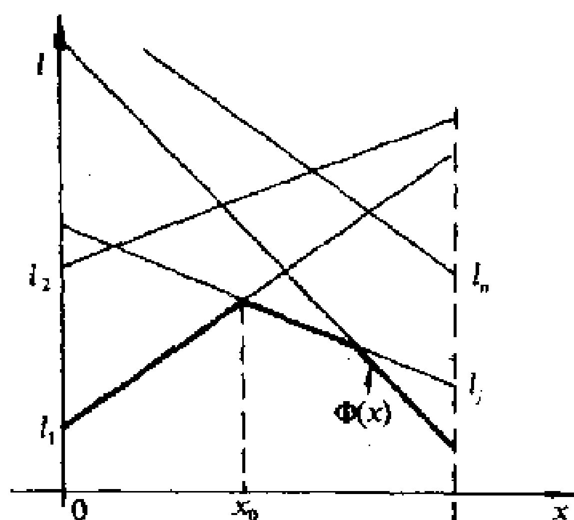


图 2.4.1

其中 λ_0 位于第 j_0 个位置处，而 $1-\lambda_0$ 位于第 j_0^* 的位置处。

若 $\varphi(x)$ 的极大点在单位区间内多于一点时，则必存在一条直线 l_{j_0}，其形式为 $l_{j_0}(x)=v^*$，这时乙可取纯策略 β_{j_0} 作为其策略。

(2)若 $\varphi(x)$ 的极大点位于单位区间的端点，例如 $x_0=0$，在过点 $(0,\varphi(0))$ 的直线中，若斜率非正，可取具斜率的绝对值为最大的那条直线，l_{j_0}，此时乙选取纯策略 β_{j_0} 即可。同样若 $\varphi(x)$ 的极大点为 $x_0=1$，则可选取过点 $(1,\varphi(1))$ 的诸直线中具有非负斜率为最大的那条直线 $l_{j_0}^*$，此时乙的优策略为纯策略 $\beta_{j_0}^*$.

在以上诸情形中若乙采取上面的策略，甲不论采取何种策略其期望所得不超过 v^*，即对策值 $v\leqslant v^*$，前已指出 $v\geqslant v^*$，从而 $v=v^*$.

对于 $m\times 2$ 矩阵对策可类似分析，留给读者。

例 1　讨论矩阵对策，其支付矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

解　设 $l_1(x)=(a_{11}-a_{21})x+a_{21}$，$l_2(x)=(a_{12}-a_{22})x+a_{22}$，若 $a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}\neq 0$，则两直线的交点为：

$$x_0 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{22} - a_{12} - a_{21}} \tag{2.4.2}$$

仿上，记 $m_1(y)=(a_{11}-a_{12})y+a_{12}$，$m_2(y)=(a_{21}-a_{22})y+a_{22}$，可解出：

$$y_0 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \tag{2.4.3}$$

对策值为：

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \tag{2.4.4}$$

甲的优策略为 $(x_0, 1-x_0)$，乙的优策略为 $(y_0, 1-y_0)$，对策值 v 如上式所示。

若 $a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}=0$，此时 $a_{11}+a_{22}=a_{12}+a_{21}$，为讨论确定起见，设 $a_{11}>a_{12}$，则必 $a_{21}>a_{22}$. 此时如 $a_{22}\leqslant a_{12}$，则 $a_{22}\leqslant a_{12}<a_{11}$，可见 a_{12} 为矩阵 A 的鞍点，即甲、乙的优策略分别为 $(1,0)$ 和 $(0,1)$，换言之 (α_1, β_2) 是鞍点。

若 $a_{22}>a_{12}$，则由 $a_{21}>a_{22}$ 必推出 $a_{21}>a_{22}\geqslant a_{12}$，即 (α_2, β_2) 是鞍点。双方优策略分别为 $(0,1)$，及 $(0,1)$。

前节所举两例其解可立即由此算出，如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

可解得 $x_0=\frac{3}{4}$，$y_0=\frac{1}{4}$，$v=\frac{7}{4}$，故甲、乙的优策略分别是 $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$，$(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$。

注意当 $|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的逆阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 为：

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

若引入向量 $\boldsymbol{e}=(1,1)$，不难把(2.4.2)，(2.4.3)，(2.4.4)重新改写为：

$$x_0=\frac{eA^{-1}}{eA^{-1}e^T},\quad y_0=\frac{A^{-1}e^T}{eA^{-1}e^T},\qquad v=\frac{1}{eA^{-1}e^T}\quad(2.4.5)$$

式中 e^T 为 e 的转置。

对于 $3\times n$ 矩阵对策，原则上可仿 $2\times n$ 的方法，但此时几何图形就变得比较复杂。

2. 当 $|A|\neq 0$ 时 3×3 矩阵对策的解法

支付矩阵 A 为 3×3 且 $|A|\neq 0$ 时所对应的对策 $\Gamma=(X,Y;A)$ 的求解公式可由(2.4.5)加以推广而得。为此令 $e=(1,1,1)$，并设对策值 $v\neq 0$，引入向量 $V=(v,v,v)$，若甲的优策略为 $x^0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$；$x_i^0>0$；乙的优策略 $y^0=(y_1^0,y_2^0,y_3^0)$，$y_j^0>0$. 由策略的性质知道对于 x^0,y^0，有(以下对转置向量均不加以标明)：

$$Ay^0=V,\qquad x^0A=V\qquad(2.4.6)$$

由于假设 $|A|\neq 0$，故 A^{-1} 存在，由此得：

$$y^0=A^{-1}V=A^{-1}ve=vA^{-1}e$$

又由于 $\sum_{j=1}^{3}y_j^0=1$，从而

$$1=(e,A^{-1}V)=v(e,A^{-1}e)=veA^{-1}e$$

于是立即推得：

$$\begin{cases}v=\dfrac{1}{(e,A^{-1}e)}\\[2ex] y^0=\dfrac{A^{-1}e}{(e,A^{-1}e)}\\[2ex] x^0=\dfrac{eA^{-1}}{(e,A^{-1}e)}\end{cases}\qquad(2.4.7)$$

公式(3.4.7)不难推广于 $n\times n$ 矩阵 A 当 $|A|\neq 0$ 时的对策 $\Gamma=(X,Y;A)$ 的求解公式，只不过此时 $e=(1,1,\cdots,1)$ 为 n 维向量而已，其推导过程仿(2,4,7)，不赘述。

例 2　求矩阵对策 Γ 的解，其支付矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

解　$|A|=-4\neq 0$，且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ -1/2 & -1/2 & 0\\ 1 & -1/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

而

$$A^{-1}e^T=(-1,-1,-2)^T,$$

$$eA^{-1}=(-\frac{5}{2},-1,-\frac{1}{2}),$$

$$(e,A^{-1}e^T)=-4$$

从而

$$v=-\frac{1}{4},\quad x^0=(\frac{5}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{8}),\quad y^0=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2}).$$

但当 $|A|=0$ 时应该怎么办？如果观察一些例子可以发现在对策的支付矩阵中存在一个实质的子矩阵 M，我们可对此子矩阵 M 进行求解，例如矩阵 A 为：

	0	0.4	0.4	0	0.2	0
0.2	12	−35	−2	−2	64	8
0.6	0	6	−11	20	0	−6
0.2	−7	7	25	−3	−74	10

在矩阵左侧的一列数字是甲取各纯策略的概率，矩阵上端一行数字是乙选取各纯策略的概率，对策值 $v=-2$，实际上我们只对此矩阵的第 2,3,5 列所构成的矩阵 M 求解。又设支付矩阵 A 为：

$$\begin{array}{c}\\ 0.5\\ 0.5\\ \\ 0\end{array}\begin{bmatrix} 0.4 & & 0.4 & 0.2 & \\ 0 & 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & -7 & 9 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

这里实质的子矩阵 M 是将矩阵去掉第 3 行、第 2 列、第 5 列而得出。类似的例子有很多。一旦找出这种实质子矩阵 M，便可仿(2.4.7)求解。

下面介绍一个"凸集的端点"的概念。设 S 是一个凸集，$s\in S$ 为集中的一点。对此 s，若在 S 中不存在点 s^1 及 s^2 使 $s=\lambda s^1+(1-\lambda)s^2$ 成立，其中 $0<\lambda<1$，$s^1\neq s^2$，则称 s 为 s 的一个端点(ex-treme point，有时也称为极点)。若甲的优策略集记作 x^0，x^0 的一个端点 x^0 称为甲的端点优策略。同样若乙的优策略集为 Y^0；则 Y^0 的一个端点 y^0 称为乙的端点优策略。

此时有如下定理

定理 2.4.1 设对策的支付矩阵为 A，对策值 $v\neq 0$，再设 x^0、y^0 为甲、乙的端点优策略，则存在 A 的非奇异子方阵 M 使得：

$$v=\frac{1}{(e,M^{-1}e)},x^0=\frac{eM^{-1}}{(e,M^{-1}e)},y^0=\frac{M^{-1}e}{(e,M^{-1}e)} \qquad (2.4.8)$$

其中 e 为一个与 M 同维数的且各分量均为 1 的向量。

需要对定理公式中的 x^0、y^0 作一说明：式中 x^0、y^0 的诸分量只包含矩阵 A 中那些出现在子阵 M 中的行和列，其次序编号一如 A 中行与列的编号。而在 M 中不出现的那些行或列所对应的分量均为零。

首先设甲、乙的优策略集分别为 X^0，Y^0，这两个集均是闭凸集。由于每个闭、有界凸集 S 都可用它的端点生成，也即若 $s^1,s^2,\cdots,s^r$ 为集 S 的端点，则 S 中每一点均可表示作如下形式：$s=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k x^k$，$\lambda_k\geqslant 0$，$k=1,2,\cdots,r$，$\sum_k \lambda_k=1$. 这可用关于包含集 S 的最

小线性空间的维数归纳法的讨论便可证明(此处略)。由此可知 X^0,Y^0 都含有极点,而 x^0、y^0 便是这样的点。

为讨论方便,将矩阵 A 的行和列的顺序重新排列,使 x^0 的首 r 个分量和 y^0 的首 s 个分量均为正,而它们剩下的其余分量全是零,这样并不影响甲、乙的优策略是由哪一些纯策略构成。于是有:$x^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_r^0,0,\cdots,0)$,$r\leqslant m$,$y^0=(y_1^0,y_2^0,\cdots,y_s^0,0,\cdots,0)$,$s\leqslant n$,由§3 性质 2,因 x^0 为优策略而 $y_j^0>0$,$j\leqslant s$,于是$(x^0,A\beta_j)=v$,$j\leqslant s$,而对于 $j>s$,$(x^0,A\beta_j)\geqslant v$,类似地,由于 y^0 为优策略,故对于 $i\leqslant r$,有$(\alpha_iA,y^0)=v$,而对于 $i>r$,有$(\alpha_i,A,y^0)\leqslant v$.

对 A 的行和列作过重新安排后,可见:(1)对于首 $\bar{r}$ 行和首 $\bar{s}$ 列,有$(\alpha_iA,y^0)=v$ 及$(x^0,A\beta_j)=v$,其中 $1\leqslant i\leqslant r\leqslant\bar{r}\leqslant m$,$1\leqslant j\leqslant s\leqslant\bar{s}\leqslant n$;(2)对于 $\bar{r}<j\leqslant m$,$(\alpha_iA,y^0)<v$;(3)对于 $\bar{s}<j\leqslant n$,$(x^0,A\beta_j)>v$. 这样一来矩阵 A 可表作如下之分块矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_7\\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_4 & \boldsymbol{A}_8\\ \boldsymbol{A}_5 & \boldsymbol{A}_6 & \boldsymbol{A}_9\end{bmatrix} \tag{2.4.9}$$

其中,A_1 为 $r\times s$ 矩阵,A_2 为$(\bar{r}-r)\times s$ 矩阵,A_3 为 $r\times(\bar{s}-s)$矩阵,$A_4=(\bar{r}-r)\times(\bar{s}-s)$矩阵,$A_5$ 为$(m-\bar{r})\times s$ 矩阵,等等。

引理 2.4.2　矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\end{bmatrix} \tag{2.4.10}$$

定义一个由由 R^s 到 $R^{\bar{r}}$ 的线性变换,此种变换仅将零向量映射为零向量。

证　设若不然,有 $z\neq 0$ 而使 $\boldsymbol{C}z=0$,可证 y^0 不是 Y^0 的一个端点。首先由 $\boldsymbol{C}z=0$ 推出 $0=(x^0,\boldsymbol{C}z)=(x^0\boldsymbol{A},z)=v\sum_{i=1}^{S}z_i$,但由于 $v\neq 0$,故 $\sum_{i=1}^{S}z_i=0$,把 z 扩充为如下之 n 维向量记作 $\tilde{z}$;即 $\tilde{z}=(z_1,$

$\cdots, z_s, 0, \cdots, 0)$，并选取充分小的 ε 作 $y_j^0 \pm \varepsilon \tilde{z}_j \geqslant 0, j=1,2,\cdots,n$，则 $y^0 \pm \varepsilon \tilde{z}$ 为一个策略，这是因为 $\sum_{j=1}^{n}(y_j^0 \pm \varepsilon \tilde{z}_j) = \sum_{j=1}^{S} y_j^0 \pm \varepsilon \sum_{j=1}^{s} z_j = 1$。此外，还可算出：

$$
\begin{aligned}
(\alpha_1, A(y^0 \pm \varepsilon \tilde{z})) &= \sum_{j=1}^{S} a_{ij}(y_j^0 \pm \varepsilon z_j) \\
&= \sum_{j=1}^{S} a_{ij} y_j^0 \pm \varepsilon \sum_{j=1}^{S} a_{ij} z_j = \begin{cases} 0, & i \leqslant \bar{r}; \\ v - \lambda_i \pm \varepsilon k_i, & i > \bar{r}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

这里由于 $i > \bar{r}$ 时 $\sum_{j=1}^{S} a_{ij} y_j^0 < v$，所以 $\lambda_i > 0, i > \bar{r}$. 而把 $\sum_{j=1}^{S} a_{ij} z_j$ 之值记作 k_i. 现选 ε 充分小使 $y^0 \pm \varepsilon \tilde{z}$ 仍是乙的优策略，这只要使 $\lambda_i = |\varepsilon k_i|$ 即可。于是 y^0 可写作：$y^0 = \frac{1}{2}(y^0 + \varepsilon \tilde{z}) + \frac{1}{2}(y^0 - \varepsilon \tilde{z})$，即 y^0 是两个优策略的凸组合，这与 y^0 是 Y^0 的端点矛盾，从而必有 $z=0$，

证毕。

由这个 C，现考虑它的一个具有如下性质的最小子矩阵 $\tilde{C}$，此 $\tilde{C}$ 使：(1) $\tilde{C}$ 应含有 A_1 的行和列；(2) 由 $\tilde{C}z=0$ 能推出 $z=0$，由刚证的引理 2.4.2，这种 $\tilde{C}$ 存在，因为至少 C 便是一个。但这里强调 $\tilde{C}$ 为 C 中具有此种性质中的最小者，其含义是对于 $\tilde{C}$ 的含有 A 的真子矩阵 C^*，条件(2)不成立。类似地可讨论矩阵 $D=(A_1, A_3)$，并引进 D 的相应的最小子矩阵 $\tilde{D}$，并要求 $\tilde{D}$ 具有性质：(1) $\tilde{D}$ 含有 A_1 的行和列；(2) 由 $w\tilde{D}=0$ 能推出 $w=0$，其中 w 是 r 维向量。

由此可以猜想有 A 的非奇异子矩阵 M——即 A 的实质子矩阵存在。事实上，A 中包含 $\tilde{C}$ 和 $\tilde{D}$ 的最小子矩阵 M 即所希望的。此 M 应由含在 $\tilde{C}$ 中的那些行及含在 $\tilde{D}$ 中的那些列构成，故 M 是一个 $r^1 \times s^1$ 矩阵，其中 $r \leqslant r^1 \leqslant \bar{r}, S \leqslant s^1 \leqslant \bar{s}$. 称此 M 为由端点(优)策略对 (x^0, y^0) 的"核"(Kernel)。即凡由 x^0, y^0 的非零分量所对应的行和列构成子阵 M 称为 (x^0, y^0) 的核。但由于 $\tilde{C}$ 及 $\tilde{D}$ 一般不是唯一确定的，所以 M 也不是唯一确定，不过在大多数情况下，对于给

定的(x^0,y^0)，M 是唯一的。

此时要证定理 2.4.1，只须证以下两点：

(1)M 是一个方阵，并且是非奇异的；(2)(2.4.8)确实成立。

引理 2.4.3 上面定义的矩阵 M 是非奇异方阵。

证 首先证由 $Mz=0$ 必推出 $z=0$. 类似再证由 $wM=0$ 必推出 $w=0$。由这两个结果便能证明引理。现设 k 为满足 $s+1\leqslant k\leqslant s^1$ 的一个给定下标(若 $s=s^1$，下面的讨论便无必要)。先证由 $Mz=0$ 必推出 $z_k=0$(即 z 的第 k 个分量是零)。用 D^* 表示由 $\widetilde{D}$ 中删去第 k 列所得之子矩阵，由于 $\widetilde{D}$ 为最小之性质，故存在一非零向量 $w^0=(w_1^0,w_2^0,\cdots,w_r^0,0,\cdots,0)$ 而使 $w^0D^*=0$，但 $w^0\widetilde{D}$ 仅有其第 k 个分量不为零。换言之 $w^0M=w^0\widetilde{D}$ 的第 k 个分量 $a_k\neq0$，而其他分量都是零，于是 $a_kz_k=(w^0M,z)=(w^0Mz)=0$，但因 $a_k\neq0$，故推出 $z_k=0$. 总之，若 $Mz=0$，则 z 必为如下形式：$z=(z_1,\cdots,z_S,0,\cdots,0)$，但这时 $Mz=0$ 恰是 $\widetilde{C}z=0$，所以必推出 $z=0$。类似地可证由 $wM=0$ 必有 $w=0$。由此知 M 显然是非奇异方阵。证毕。

下面证定理 2.4.1，由引理 2.4.3，M 为非奇异方阵，并注意 M 也是

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{bmatrix}$$

的子阵，且 x^0,y^0 为优策略，所以

$$\widetilde{x}^0M=V,\quad M\widetilde{y}^0=V$$

其中 V 为与 M 同维且各分量均为 v 的向量，$\overline{x}^0,\overline{y}^0$ 分别是 x^0,y^0 中把零分量去掉以后所得的向量，则由前述方法显然(2.4.8)成立。证毕。

可证定理的逆定理也成立，即：

定理 2.4.4 若 x^0,y^0 是由(2.4.8)表示的优策略且 M 是 A 的一个非奇异子方阵，则 x^0,y^0 为端点优策略。

证 若设 $x^0=(x^1+x^{11})/2$，其中 x^1 和 x^{11} 都是优策略，由于

x^0 的分量所对应于 A 的行和列如果不出现在 M 中，这样的分量应等于零，从而 x^1 和 x^{11} 相对应的分量也应等于零。这样，向量 x^1M 和向量 $x^{11}M$ 便有意义。又由于 x^1, x^{11} 都是优策略，所以 $x^1M \geqslant v, x^{11}M \geqslant v$，由此推出 $x^0M \geqslant v$. 但若 $x^1M \geqslant v$ 及 $x^{11}M \geqslant v$ 中有一个对某分量出现严格不等式，这时对该分量便有 $x^0M > v$. 但由(2.4.8)这是不可能的，所以必为 $x^1M = V$ 及 $x^{11}M = V$，于是 $(x^1 - x^{11})M = 0$，但由于 M 是非奇异的，故推知 $x^1 = x^{11}$。由定义 x^0 是 X^0 的端点。同理可证 y^0 是 Y^0 的端点。证毕。

在以上讨论中假设 $v \neq 0$，若 $v = 0$，可选取适当的 a 而构造新矩阵 $(a_{ij} + a)_{m \times n}$，此时对策值为 a，而公式(2.4.8)完全可应用到新对策上并得如下公式：

$$\begin{cases} x^0 = \dfrac{e\operatorname{adj}(\boldsymbol{M})}{(e, \operatorname{adj}(\boldsymbol{M})e)} \\ y^0 = \dfrac{\operatorname{adj}(\boldsymbol{M})e}{(e, \operatorname{adj}(\boldsymbol{M})e)} \\ a + v = \dfrac{|\boldsymbol{M} + \boldsymbol{a}|}{(e, \operatorname{adj}(\boldsymbol{M})e)} = a + \dfrac{|\boldsymbol{M}|}{(e, \operatorname{adj}(\boldsymbol{M})e)} \end{cases} \tag{2.4.11}$$

式中 $\operatorname{adj}(M)$ 表示 M 的伴随矩阵，它是由 $M^{-1} = \dfrac{1}{|M|}\operatorname{adj}(M)$ 而来，最后一式 $|M + \boldsymbol{a}|$ 中，$\boldsymbol{a}$ 的元素为 a 且维数与 M 相同的矩阵，这里当然设 $(e, \operatorname{adj}(M)e) \neq 0$.

综合定理 2.4.1 及 2.4.4，可给出如下定理：

定理 2.4.5 设支付矩阵为 A 而对策值为 v 的对策 Γ，其优策略 x^0, y^0 为端点优策略的充要条件是存在 A 的一个子方阵 M 使得：

$$
\begin{cases}
(e,\mathrm{adj}(\boldsymbol{M})e) \neq 0 \\
v = \dfrac{|\boldsymbol{M}|}{(e,\mathrm{adj}(\boldsymbol{M})e)} \\
\tilde{x}^0 = \dfrac{e\,\mathrm{adj}(\boldsymbol{M})}{(e,\mathrm{adj}(\boldsymbol{M})e)} \\
\tilde{y}^0 = \dfrac{\mathrm{adj}(\boldsymbol{M})e}{(e,\mathrm{adj}(\boldsymbol{M})e)}
\end{cases} \tag{2.4.12}
$$

其中 $\tilde{x}^0$ 是 x^0 中删去那些对应于 $\boldsymbol{A}$ 中不在 $\boldsymbol{M}$ 中出现的那些行所对应的分量后所得到的向量，$\tilde{y}^0$ 也是由 y^0 中用相似方法得到的。

在此定理中已不再区分 $v\neq0$ 与 $v=0$ 了。

上面的定理提供了寻求对策端点优策略的系统方法。此时不妨设 $v\neq0$，首先取出 $\boldsymbol{A}$ 的所有可能的子方阵 $\boldsymbol{M}$，对每个 $\boldsymbol{M}$ 检验它是否有逆，若没有逆，检验另一个 $\boldsymbol{M}$. 若某方阵有逆，计算 $\tilde{x}^0$，$\tilde{y}^0$ 和 v，这只要使用(2.4.8)即可。此时关系 $\sum_i \tilde{x}_i^0=1$ 及 $\sum_j \tilde{y}_j^0=1$ 会自动满足。不过此时很可能出现 $\tilde{x}_i^0<0$ 或 $\tilde{y}_j^0<0$. 若有此情况应予放弃该解。假如 $\tilde{x}^0$，$\tilde{y}^0$ 的所有分量都非负，再把所有那些删去的分量按原来顺序一律补充为零，便得到策略 x^0，y^0. 还应注意由(2.4.8)，x^0 与任何未删去的列之间的内积等于 v，此外还应检验 x^0 与删去的列之间的内积是否不小于 v. 关于 y^0 也应作相应的检验。如果这些检验都正确，x^0 与 y^0 便是所求的端点优策略。否则就应抛弃此 $\boldsymbol{M}$ 而进行另一个。一旦所有可能的子方阵都这样检验计算完毕，便可得到甲、乙的端点优策略集，而甲、乙的其他优策略可以用他们的端点优策略的凸组合表示出来。

例 3　求解对策，其支付矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为：

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 3 \\
1 & 1 & 0 \\
0 & 2 & -5
\end{pmatrix}
$$

解　此处略去详细计算过程而把所求得的结果写出如下：

$$M = a_{11} = 1, x^0 = (1,0,0), y^0 = (1,0,0)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, x^0 = (1,0,0), y^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, x^0 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0), y^0 = (1,0,0)$$

$$M = A, x^0 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0), y^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

下面讨论几类特殊的对策。

假如对策的每个优策略 x^0, y^0 都是由甲、乙的每一个纯策略以正概率构成，即优策略 $x^0=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$ 及 $y^0=(y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0)$ 中 $x_i^0>0, i=1,2,\cdots,m, y_j^0>0, j=1,2,\cdots,n$. 此时称甲、乙的策略为完全混合策略，相应的对策称为完全混合对策，其支付矩阵称为完全混合的支付矩阵。由(2.4.8)可以断定：

定理 2.4.6 支付矩阵为 A 的完全混合对策的解是唯一的。

事实上它是定理 2.4.5 的一个推论，因为若 x^0, y^0 是端点优策略，并且 $x_i^0>0, i=1,2,\cdots,m, y_j^0>0, j=1,2,\cdots,m$. 那么它们的核必然是整个矩阵 A，因此由(2.4.12)，它的所有端点优策略必重合为一个，因此每个局中人的解必是唯一的。

由此还可推出若对策（支付为 A）是混合的，且 $v \neq 0$，则 A 必是非奇异的。这是显然的，因为任何一对端点优策略的核是 A，再由定理 2.4.1 立即得到结论。

完全混合对策是一种重要对策，因为它求解较简单，且有一些较好性质。事实上可证：

定理 2.4.7 若 A 是完全混合的，则它的转置 $B=A^T$ 也是完全混合的，反之亦真。

证明略（留给读者）。

例 4 (Minkowski－Leontief 矩阵)，这是在经济活动分析中出现的矩阵。这种矩阵 A 是指：(1) A 是方阵；(2) $\lambda>q\geqslant 0$；(3) $a_{ij}\leqslant$

$q, i \neq j$；(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} > nq \geqslant 0$，在实用的情况下常令 q 为零，可证以此 A 为支付矩阵的对策是混合对策。事实上若令 $x=(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n})$，则 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} > q$，由此推出对策值 $v > q \geqslant 0$. 再设 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 是优策略，但 $x_{j_0}=0$，则可推出矛盾。事实上此时

$$(xA)_{j_0} = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij_0} = \sum_{i \neq j_0} x_i a_{ij_0} \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i q \leqslant q < v$$

这表明 x 不可能是优策略，这与 x 为优的假设矛盾，所以甲的每一个优策略的各个分量必然都是正的。再考察乙的策略，设 $y=(y_1, \cdots, y_n)$ 为乙的优策略，但设 $y_{i_0}=0$，同样由优策略的性质：$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=v, \forall\ i \neq i_0$. 然而对于 $i=i_0$，却又有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} y_j = \sum_{j \neq i_0} a_{i_0 j} y_j \leqslant q < v$$

这与 y 是乙的优策略的假设矛盾。所以乙的每一个分量必然是正的。由此推出每个 Minkowski－Leontief 矩阵都是非奇异矩阵。由于对任何优策略 $x, y, x_i > 0, y_j > 0, i, j = 1, \cdots, n$，所以 A 是完全混合的。

另一类重要的特殊对策是对称对策(symmetric Game)。若矩阵对策的支付矩阵 A 满足 $A^T = -A$，这时两局中人均有相同的策略集，并且他们采用相似的策略时所得效益也相似，所以这是一个很公平的对策，因为得胜的机会对双方都一样。事实上若甲使用策略 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，而乙采用纯策略 β_j 的话，甲的所得为 $(xA)_j$，类似，若甲取纯策略 α_i 而乙取策略 y，则甲的所得为 $(Ay)_i$，如果 $x=y$，则显然(注意乙之所得即为甲之所失)有 $-Ay=xA$. 这说明在对称对策中，甲能做到的乙也必然能做到。

当 $x=y$ 时，$(x, Ay)=(x, Ax)=(xA, x)=-(x, Ay)$，故推出

$(x,Ay)=0$. 即对策值 $v=0$. 又由于 $-Ay=Ax$，所以双方的优策略集 X^0,Y^0 必恒同。由于这个性质，所以对称对策比较重要。因此人们有时把一个已给矩阵对策对称化，下面介绍一种把 A 对称化的方法。

定理 2.4.8 若 A 为 $m\times n$ 矩阵，则存在对称化矩阵 A_1，它是 $(m+n+1)\times(m+n+1)$ 阶的。对于支付为 A_1 的对策，其优策略 $(x_1,\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_n;\lambda)=(x,y,\lambda)$ 具有以下性质：$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{j=1}^{n}y_j=a>0$，并且 $x/a,y/a$ 为以 A 为支付的对策 Γ 的优策略，Γ 的对策值为 λ/a. 反之亦真。

证 对于对策 Γ，设其值 $v(A)\neq 0$，作

$$A_1=\begin{pmatrix}0 & A & -1\\ -A^T & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\tag{2.4.13}$$

此时 A_1 是 $m+n+1$ 阶的斜对称矩阵(Skew－Symmetric Matrix)，也即 $A_1^T=-A_1$. 现令 $(x_1,\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_m;\lambda)=(x,y;\lambda)$ 为支付是 A_1 的对策中乙的优策，则由于 A_1 的对策值为零，所以

$$\begin{cases}Ay-\boldsymbol{\lambda}\leqslant 0,\\ -xA+\boldsymbol{\lambda}\leqslant 0,\\ \sum_{i=1}^{m}x_i-\sum_{j=1}^{n}y_i\leqslant 0\end{cases}\tag{2.4.14}$$

这里 $\boldsymbol{\lambda}$ 是一个所有分量均为 λ 的向量。注意 $\lambda>0$，因为否则当 $\lambda=0$ 时在(2.4.14)中将有 $Ay\leqslant 0$，$xA\geqslant 0$，这就推出 $v(A)=0$，与假设 $v(A)\neq 0$ 矛盾。然而对于 $\lambda>0$，由优策略的性质推出 $\sum_i x_i=\sum_j y_j$. 最后，还应指出 $\lambda<1$，因为否则当 $\lambda=1$ 时有 $x=y=0$，从而不能有 $-xA-\boldsymbol{\lambda}\leqslant 0$ 或 $XA\geqslant\boldsymbol{\lambda}$，故 $\lambda<1$ 成立。从而有 $\sum_i x_i=\sum_j y_j$

$=\frac{1-\lambda}{2}>0$。现令 $a=(1-\lambda)/2$，则 $a>0$，用 a 遍除(3.4.14)各式，可得 $A(y/a)\leqslant\lambda/a\leqslant(x/a)A$. 这说明 $x/a, y/a$ 是 A 的优策略，而以 A 为支付的对策 Γ 有值为 λ/a.

反之，若 $x=(x_1,\cdots,x_m)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$是 Γ 的优策略，此时作向量

$$w=\left(\frac{x}{2+v},\frac{y}{2+v},\frac{v}{2+v}\right)$$

可以验证它是以 A_1 为支付的对策的一个优策略，这里 v 是 Γ 的对策值。验证过程略。

§5 矩阵对策与线性规划的关系

假设读者已了解线性规划方法，他们便不难发现线性规划与二人零和对策有密切关系。

考虑对策 $\Gamma=(X,Y;A)$，其中 A 为 $m\times n$ 矩阵，不失一般性可设矩阵的每个元素都是正的，否则可对每个元素都加上同样一个充分大的数，这样做不会改变原对策的优策略集。现设 $v_x=\min\limits_j(xA_{\cdot j})$，这里 $A_{\cdot j}$为 A 的第 j 列构成的列向量。由于 A 的元素均为正，所以对任何策略 x，$v_x>0$，又由 v_x 的定义，

$$v_x\leqslant xA_{\cdot j},\qquad j=1,2,\cdots,n,\tag{2.5.1}$$

但因乙的策略是其纯策略的凸组合，故对任何 $y\in Y$，$(x,Ay)\geqslant v_x$. 于是有 $v_x\leqslant v$，其中 v 为对策值。但若 $\bar{x}$ 是优策略，又可推出 $\bar{x}A_{\cdot j}=(\bar{x}A,\beta_j)\geqslant v$，即 $v_{\bar{x}}\geqslant v$. 从而 $v_{\bar{x}}=v$.即 $\bar{x}$ 为优策略等价于等式

$$v_{\bar{x}}=\max_x v_x=v\tag{2.5.2}$$

现设向量 $\tilde{x}=\frac{1}{v_x}x$，于是(2.5.1)变作：

$$\tilde{x}A_{\cdot j}\geqslant 1,\qquad j=1,2,\cdots,n\tag{2.5.3}$$

若令 $e=(1,1,\cdots,1)$ 为 m 维向量，并由于 x 为策略，故 $\tilde{x}e^T=1/v_x$，且 $\tilde{v}\geqslant 0$，将此结果与(2.5.2)相比较可见 x 为优策略的充要条件是 $\tilde{x}e^T$ 取极小，换言之，要求出对策 Γ 中甲的优策略 x，就相当于使线性函数 $\tilde{x}e^T$ 极小化。即此处实际上是一个线性规划问题：求 $\tilde{x}$ 使

$$\begin{cases} \tilde{x}e^T \to \min \\ s.t. \quad \tilde{x}A_{\cdot j} \geqslant 1, \qquad j=1,2,\cdots,n \\ \qquad\quad \tilde{x} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.5.4}$$

称此问题为问题Ⅰ，类似的分析，对乙的每个策略 y，定义 $v_y=\max\limits_i A_{i\cdot}\, y^T$，这里 $A_{i\cdot}$ 表示 A 的第 i 行元素构成的行向量，并令 $\tilde{y}=y/v_y$，可得另一线性规划问题：求 $\tilde{y}$ 使

$$\begin{cases} e\tilde{y}^T \to \max \\ s.t. \quad A_{i\cdot}\tilde{y}^T \leqslant 1, \qquad i=1,2,\cdots,m \\ \qquad\quad \tilde{y} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.5.5}$$

其中 $e=(1,1,\cdots,1)$ 为 n 维向量，称此问题为问题Ⅱ.

注意线性规划问题和它的对偶问题是如下的一对：

原 问 题	对 偶 问 题
$\begin{cases} \text{求 } x \text{ 使}(x,C)\to\max, \\ s.t. \quad xA\leqslant b \\ \qquad\quad x\geqslant 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \text{求 } y \text{ 使}(b,y)\to\min, \\ s.t. \quad Ay^T\geqslant C^T \\ \qquad\quad y\geqslant 0 \end{cases}$

(2.5.6)

这里 A 为 $m\times n$ 矩阵，x,C 为 m 维向量，b,y 为 n 维向量。现用此观点考察问题Ⅰ与Ⅱ.若用 y^T 右乘 $xA\leqslant b$ 两端，可得 $xAy^T\leqslant by^T=(b,y)$，同样，用 x 左乘 $Ay^T\geqslant C^T$ 两端可得 $xAy^T\geqslant xC^T=(x,C)$，比较这两种结果便得：

$$(x,C)\leqslant(b,y) \tag{2.5.7}$$

这里 x,y 分别是满足原问题及对偶问题中条件的向量。在(2.5.7)中若等式成立，则(x,C)在原问题约束条件下取了尽可能大的

值。而(b,y)在对偶问题约束条件下取了尽可能小的值。换言之，x、y 确是线性规划问题的最优值，而问题Ⅰ，Ⅱ是互为对偶的线性规划问题。

现考察相反的问题，已给线性规划的原问题及其对偶问题(2.5.6)，可由此构造一个斜对称矩阵：

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -A & C^T \\ A^T & 0 & -b^T \\ -C & b & 0 \end{bmatrix}$$

它是 $m+n+1$ 阶方阵。显然把它看作支付矩阵的对策是一个对称对策，对策值 $v(M)=0$，且甲、乙有相同的优策略集。设局中人之一的策略为$(x,y;\lambda)=(x_1,\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_n;\lambda)$，此时有如下定理：

定理 2.5.1 若以 M 为支付的对称对策当 $\lambda>0$ 时有解，则线性规划(2.5.6)中原问题及对偶问题均有解，反之亦然。

证 设 $z=(x_1,\cdots,x_m;y_1,\cdots,y_n,\cdots,\lambda)$为对策 M 的优策略，其中 $\lambda>0$. 由于对称对策的值 $v(M)=0$，故得

$$Mz\leqslant 0$$

或

$$-Ay+\lambda C^T\leqslant 0, A^Tx-\lambda b^T\leqslant 0$$
$$-(C,x)+(b,y)\leqslant 0$$

但由于 $\lambda>0$，由优策略性质应有$(C,x)=(b,y)$。于是上面三式可写作：

$$\begin{cases} A(y/\lambda)\geqslant C \\ (x/\lambda)A\leqslant b \\ (C,x/\lambda)=(b,y/\lambda) \end{cases} \qquad (2.5.8)$$

令 $\bar{y}=y/\lambda, \bar{x}=x/\lambda$，由(2.5.8)，$\bar{x}$，$\bar{y}$ 都是可行的，且对任何满足(2.5.8)中约束条件的 $x\in X$，都有$(C,x)\leqslant(A\bar{y},x)=(xA,\bar{y})\leqslant(\bar{x}A,\bar{y})\leqslant(b,\bar{y})=(C,\bar{x})$，也即

$$\max_{x\in X}(C,x)=(C,\bar{x})$$

类似可推出

$$\min_{y\in Y}(b,y)=(b,\bar{y})$$

这说明 $\bar{x},\bar{y}$ 分别是原问题与对偶问题的解。

下面再证其逆。若 $x=(x_1,\cdots,x_m)$ 及 $y=(y_1,\cdots,y_n)$分别是原问题和它的对偶问题的解，令

$$\lambda=\frac{1}{1+\sum_i x_i+\sum_j y_j}$$

并令 $\tilde{x}_i=\lambda x_i,\tilde{y}_j=\lambda y_j,\tilde{z}=(\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_m,\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{y}_n;\lambda)=(\tilde{x},\tilde{y};\lambda)$. 显然 $\sum\tilde{z}_i=1$. 现证 $\tilde{z}$ 是对称对策 M 的解。注意 $\tilde{z}_i\geqslant 0$，且 $Ay\geqslant C\to\lambda Ay\geqslant\lambda C\to -Ay+\lambda C\leqslant 0$. 类似地可推出 $xA-\lambda b\leqslant 0$. 由于线性规划理论中有定理：若原问题有解 $\tilde{x}$，则其对偶问题也有解 $\tilde{y}$，且使 $(C,\tilde{x})=(b,\tilde{y})$. 所以此结果与上两式结果推知 $M\tilde{z}\leqslant 0$，换言之 $\tilde{z}$ 是对称对策 M 的解。

这样我们在线性规划与矩阵对策之间建立了联系。

最后考察一类约束对策(Constrained Game). 这是指在支付矩阵为 A 的对策中，若局中人甲、乙因客观现实情况的限制不可能取到他们各自的策略集 X,Y 中所有的策略 x,y，而是只能采取其中之一部分，例如只能由 X,Y 中某个凸超多面体中选取策略，也即策略的选取要受到一些线性不等式或方程的约束。不妨设此时甲、乙的策略集分别为 $\overline{X},\overline{Y}$，它们各自由以下的约束条件确定：

$$xB\leqslant C,\qquad x\geqslant 0 \tag{2.5.9}$$

及

$$yE^T\geqslant F,\qquad y\geqslant 0 \tag{2.5.10}$$

此时双方所要选择的优策略分别是：

甲：$\max\limits_{x\in\overline{X}}(\min\limits_{y\in\overline{Y}}(x,Ay))$ (2.5.11)

乙：$\min\limits_{y\in\overline{Y}}(\max\limits_{x\in\overline{X}}(x,Ay))$ (2.5.12)

在(2.5.11)中，$\min_{y\in\overline{Y}}(x,Ay)$显然是 x 的函数，确切的说这是一个线性规划的值，不过它的目标函数的系数依赖于 x. 此线性规划问题是：求 y 使

$$\begin{cases}(xA,y)\rightarrow \min \\ s.t. \qquad yE^T \geqslant F \\ \qquad\qquad y \geqslant 0\end{cases} \tag{2.5.13}$$

现将 xA 看作一个新向量，上面的规划问题的对偶问题是求 z 使

$$\begin{cases}(z,F)\rightarrow \max \\ s.t. \qquad zE \leqslant xA \\ \qquad\qquad z \geqslant 0\end{cases} \tag{2.5.14}$$

因此甲的问题变成：求 z,x 使

$$\begin{cases}(z,F)\rightarrow \max \\ s.t. \qquad zE - xA \leqslant 0 \\ \qquad\qquad xB \leqslant C \\ \qquad\qquad x,z \geqslant 0\end{cases} \tag{2.5.15}$$

类似地，局中人乙的问题变作：求 s,y 使

$$\begin{cases}(C,s)\rightarrow \min \\ s.t. \qquad sB^T - yA^T \geqslant 0 \\ \qquad\qquad yE^T \geqslant F \\ \qquad\qquad s,y \geqslant 0\end{cases} \tag{2.5.16}$$

以上这些问题都可采用单纯形法求解。

若引进记号

$$\begin{cases}M = \begin{pmatrix}E & 0 \\ -A & B\end{pmatrix} \\ \tilde{z} = (z,x) \\ \tilde{C} = (0,C)\tilde{s} = (y,s) \\ \tilde{F} = (F,0)\end{cases}$$

从而前述两问题可重新写作：求 $\tilde{z}$ 使

$$\begin{cases} (\tilde{z},\tilde{F}) \to \max \\ s.t. \qquad \tilde{z}M \leqslant \tilde{C} \\ \qquad\qquad \tilde{z} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.5.17}$$

及求 $\tilde{s}$ 使

$$\begin{cases} (\tilde{s},\tilde{C}) \to \min \\ s.t. \qquad M\tilde{s}^T \geqslant \tilde{F}^T \\ \qquad\qquad \tilde{s} \geqslant 0 \end{cases} \tag{2.5.18}$$

显然后一问题是前一问题的对偶问题，由线性规划的对偶定理，若一问题有解则另一问题也有解，且 $(\tilde{z},\tilde{F})=(\tilde{s},\tilde{C})$，即约束对策有解。

参 考 文 献

[1] 麦克金赛 J C C. 博弈论导引. 北京：人民教育出版社，1960

[2] 中科院数学所二室. 博弈论导引. 北京：人民教育出版社，1960

[3] Karlin S. Mathematical Methods and Theory of Games. Programming and Economics (I) . Pergamon Press，1959

[4] Aubin J P. Mathe matical Methods of Games and Economic Theory. North－Holland，1979

[5] Dresher M，shapley L S，Tucker A W. Advances in Game Theory. Princeton：Princeton Univ. Press，1964

第三章　二人一般和矩阵对策

§1　Nash 平衡点

本章讨论的矩阵对策中两局中人的支付矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 之和不为零，即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\neq 0$，这意味着甲、乙两人并非处于对抗的争斗状态，即不是处于你死我活的尖锐矛盾之中，他们间可能存在某种共同利益，因而存在合作的可能性。故一般说来，在一般和矩阵对策中，局中人所持的态度可分为两种：(1)不合作；(2)合作。本节讨论不合作的情形。

设所论对策为 $\Gamma=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，这里 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 分别是甲、乙两人的(混合)策略集。当然也可给出对策 $\Gamma_0=\langle S^1,S^2;\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle$，其中 S^1，S^2 分别是甲、乙两人的纯策略集，Γ 是 Γ_0 的混合扩张。这里 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$. 有时我们将它们写作$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$或$(a_{ij},b_{ij})$. 由于对策的支付必须用两个矩阵给出，故称此类对策为双矩阵对策(Bimatrix Game).

在不合作情形中我们规定局中人之间禁止任何形式的勾结、联合，包括协调策略以及付给另一方一些报酬之类。不合作情形对策的基本概念已有介绍(见第一章)，其解即非合作平衡，现将该定义重述于下：

定义 3.1.1　在对策 $\Gamma=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$中若有策略对$(\bar{x},\bar{y})\in \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y})$使得

$$\begin{cases} \bar{x}A\bar{y} \geqslant xA\bar{y} & ,x \in X \\ \bar{x}B\bar{y} \geqslant \bar{x}By & ,y \in Y \end{cases} \tag{3.1.1}$$

则称$(\bar{x},\bar{y})$为Γ的一个非合作平衡点。

上述定义由 John Nash 给出，故也称为 Nash 平衡点，或简称为平衡点。显然会问它的存在性，事实上可证：

定理 3.1.1 每个双矩阵对策至少存在一个非合作平衡点。

证 考察对策$\Gamma=(X,Y;A,B)$，对甲、乙的任何一对混合策略x和y，假设

$$\begin{cases} c_i = \max\{A_{i\cdot}y^T - xAy^T, O\} \\ d_j = \max\{xB_{\cdot j} - xBy^T, O\} \end{cases} \tag{3.1.2}$$

这里c_i表明对于策略x、y，x中有可改进的分量i的“改进程度”，同样可解释d_j. 由此进一步定义

$$x_i^1 = \frac{x_i + c_i}{1 + \sum_k c_k}, \quad y_j^1 = \frac{y_j + d_j}{1 + \sum_k d_k} \tag{3.1.3}$$

由(3.1.3)，给出一个新的策略对(x^1,y^1). 它也可看作由(3.1.3)所示之线性变换$(x^1,y^1)=T(x,y)$. 易知，该变换是连续的。显然可猜想当且仅当(x,y)是平衡点时$(x^1,y^1)=(x,y)$，即(x,y)是不能进一步“改进”。事实上若(x,y)是平衡点，则对一切i显然应有$A_{i\cdot}y^T \leqslant xAy^T$，从而有$c_i=0$，类似地对一切$j$有$d_j=0$，于是$x^1=x$，$y^1=y$.

另一方面若(x,y)不是平衡点，这表明或者存在某个策略$\bar{x}$使$\bar{x}Ay^T > xAy^T$，或者存在某个策略$\bar{y}$使$xB\bar{y}^T > xBy^T$. 不妨设第一种情况成立。此时由于$\bar{x}Ay^T$是由诸$A_{i\cdot}y^T$的项的一种加权平均，所以必有某指标i使$A_{i\cdot}y^T > xAy^T$成立，也即对该指标$c_i > 0$. 因诸C_k非负，所以$\sum_k c_k > 0$. 但因xAy^T是由诸项$A_{i\cdot}y^T$的加权平均，权系数为x_i，故推出有某指标(仍记为i)使$x_i > 0$而它所对应的有$A_{i\cdot}y^T \leqslant xAy^T$. 对此指标$i$有$C_i=0$，于是

$$x_i^1=\frac{x_i}{1+\sum_k c_k}<x_i$$

这说明 $x^1\neq x$. 对于 $x B \bar{y}^T > x B y^T$ 的情形可类似证明 $y^1\neq y$.

综合以上可知(x,y)为平衡点的充要条件是$(x^1,y^1)=(x,y)$.

现在由于一切策略对构成的集是一个闭、有界凸集，且变换 $T(x,y)=(x^1,y^1)$连续，故应用 Brouwer 不动点原理，变换 T 必有一个不动点，此不动点即平衡点。证毕。

定理虽论证了平衡点的存在，但它却没有给出求平衡点的具体方法。

双矩阵对策的平衡点与零和对策的平衡点(即鞍点)有许多不同之处，例如在零和对策情况下，若(σ_1,σ_2)及(τ_1,τ_2)是两平衡点时，则(σ_1,τ_2)、(τ_1,σ_2)也是，且诸平衡点处的支付均相等(见定理2.1.2)，但这些性质对双矩阵对策却不成立。

例 1　夫妻争吵型问题　考虑双矩阵对策：

$$\begin{pmatrix}(4,1) & (0,0)\\(0,0) & (1,4)\end{pmatrix}$$

显然甲、乙都取其第一个纯策略 $x=(1,0)$，$y=(1,0)$，而构成(x,y)，它是平衡点，而甲、乙都取其第二个纯策略 $x^1=(0,1)$，$y^1=(0,1)$，(x^1,y^1)也构成平衡点。然而，(x,y^1)和(x^1,y)却都不是平衡点，而且在两个平衡点(x,y)及(x^1,y^1)处局中人所得也都不相同。显然甲更倾向于(x,y)而乙更倾向于(x^1,y^1)。所以这样的平衡点不是“很稳定”的，因为若甲知乙选择纯策略 y^1，此时甲可能采取 x 而不是 x^1 以便阻止(或影响)乙采用 y^1，并由此迫使乙采取 y. 所以一般说来，说清确切采取什么也许比较困难，不过若采取混合策略的话，策略 $x^{11}=(4/5,1/5)$，$y^{11}=(1/5,4/5)$构成一个平衡点。

例 2　囚徒两难型问题　考虑双矩阵对策：

$$\begin{pmatrix}(5,5) & (0,10)\\(10,0) & (1,1)\end{pmatrix}$$

若设双方追求所得愈多愈好，并假设引用零和矩阵对策中判别策略优劣性的原则，对甲来说其第二行各项均大于第一行相对应的各项，对乙而言其第二列的各项也均大于第一列相对应的各项。依此方法显然双方都应将他们的第一个策略删去，剩下的元素是(1,1)。它是一个平衡点，但此时双方所得支付为(1,1). 然而若双方"误用"了策略，例如均采取他们的第一个纯策略，此时双方所得却是(5,5)，它显然对双方都十分有利。这又说明在双矩阵对策中所求得的平衡点往往并非局中人所希望的。

由于这些不同因而提出新的问题和出现新的困难，因而需要新的理论。

§2　平衡点的 Lemke－Howson 算法

设考虑双矩阵对策 $\Gamma=(X,Y;A,B)$，其中 A,B 均为 $m\times n$ 矩阵，并设 $I=\{1,\cdots,m\}$，$J=\{1,\cdots,n\}$ 为两个指标集。再设用纯策略集表示时对策为 $\Gamma_0=\langle S^1,S^2;A,B\rangle$. 在计算平衡点前，先叙述一些有关结论。

引理 3.2.1　$(\bar{x},\bar{y})$ 为平衡点的充要条件为

$$\begin{cases}\bar{x}A\bar{y}\geqslant A_{i\cdot}\bar{y}, & i\in I;\\ \bar{x}B\bar{y}\geqslant \bar{x}B_{\cdot j}, & j\in J.\end{cases}\tag{3.2.1}$$

引理显然(留给读者)。

现用 $\mathscr{G}(\Gamma_0)$，$\mathscr{G}(\Gamma)$ 分别表示 Γ_0，Γ 的平衡点集，由上述引理可得如下推论：

推论　1. $(\alpha_i,\beta_j)\in\mathscr{G}(\Gamma_0)\Leftrightarrow(\alpha_i,\beta_j)\in\mathscr{G}(\Gamma)$.

2. $(\bar{x},\bar{y})\in\mathscr{G}(\Gamma)\Leftrightarrow\begin{cases}\bar{x}A\bar{y}=\max\limits_{i\in I}A_{i\cdot}\bar{y};\\ \bar{x}B\bar{y}=\max\limits_{j\in J}\bar{x}B_{\cdot j}.\end{cases}$

3. $(\bar{x},\bar{y})\in\mathscr{G}(\Gamma)\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\bar{x}_k>0\Rightarrow A_{k\cdot}\bar{y}=\max\limits_{i\in I}A_{i\cdot}\bar{y}; & k\in I;\\ \bar{y}_l>0\Rightarrow \bar{x}B_{\cdot l}=\max\limits_{j\in J}\bar{x}B_{\cdot j}, & l\in J.\end{cases}$$

这些推论的证明留给读者。

引理 3.2.2 设(A^n,B^n)是矩阵序列，且设当$n\to\infty$时它们分别收敛于某矩阵(A,B)，即$A^n\to A$①，$B^n\to B(n\to\infty)$，若$\Gamma^k=\langle X,Y;A^k,B^k\rangle$关于$k=1,2,\cdots$，均有一个平衡点，则$\Gamma=\langle X,Y;A,B\rangle$也有一个平衡点。

证 设$(x^k,y^k)\in\mathscr{G}(\Gamma^k)$，$k=1,2,\cdots$，由于$X\times Y$在$R^{m+n}$空间中为紧集，故存在$\mathscr{K}=\{1,2,\cdots\}$的子序列$\mathscr{K}_0\subseteq\mathscr{K}$使$(\bar{x},\bar{y})\in X\times Y$，满足$(x^k,y^k)\to(\bar{x},\bar{y})$，$k\in\mathscr{K}_0$. 显然对任何$x\in X$，$y\in Y$，有

$$\bar{x}A\bar{y}=\lim_{k\in \mathscr{K}_0}x^kA^ky^k\geqslant\lim_{k\in \mathscr{K}_0}xA^ky^k=xA\bar{y},$$

$$\bar{x}B\bar{y}=\lim_{k\in \mathscr{K}_0}x^kB^ky^k\geqslant\lim_{k\in \mathscr{K}_0}x^kB^ky=\bar{x}By,$$

这说明$(\bar{x},\bar{y})\in\mathscr{G}(\Gamma)$. 证毕。

为了叙述算法方便计，引入以下记号：对于$\Gamma=\langle X,Y;A,B\rangle$，记

$$\begin{cases}K_i=\{y\in Y\mid A_{i\cdot}y\geqslant A_{k\cdot}y,k\in I\},i\in I;\\ L_j=\{x\in X\mid xB_{\cdot j}\geqslant xB_{\cdot l},l\in J\},j\in J.\end{cases}\tag{3.2.2}$$

$$\begin{cases}K_T=\bigcap\limits_{i\in T}K_i,T\subseteq I,T\neq\varnothing;\\ L_R=\bigcap\limits_{j\in R}L_j,R\subseteq J,R\neq\varnothing;\end{cases}\tag{3.2.3}$$

$$\begin{cases}X_V=\{x\in X\mid x_i=0,i\in V\},V\subsetneqq I,V\neq I;\\ Y_U=\{y\in Y\mid y_j=0,j\in U\},U\subsetneqq J,U\neq J.\end{cases}\tag{3.2.4}$$

以上这些集合的含义很清楚，例如K_i表示对给定甲的纯策略α_i，凡认为在乙使用策略y时α_i优于α_k，$k\in I$时乙的那些策略的全体

① $A^n\to A(n\to\infty)$指当且仅当$a_{ij}^n\to a_{ij}$，$i\in I$，$j\in J$，$n\to\infty$.

的集，X_U 是由 U 在 I 中的余集 U^C 中诸单位向量构成的单纯形，余类推。再引入集合：

$$\begin{cases} T = \{i \mid \bar{x}_i > 0\}, V = \{i \mid \bar{x}_i = 0\}; \\ R = \{j \mid \bar{y}_j > 0\}, U = \{j \mid \bar{y}_j = 0\}. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

考虑到平衡点的性质（引理 3.2.1 及其推论），可猜想有：

定理 3.2.2 设 $(\bar{x},\bar{y}) \in X \times Y$，则 $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathscr{G}(\Gamma) \Leftrightarrow (\bar{x},\bar{y})$，$\in (L_R \cap X_V) \times K_T \cap Y_U)$.

证 由 U 及 V 的定义显然 $(\bar{x},\bar{y}) \in X_V \times Y_U$，剩下的部分可由引理的推论得到。例如当 $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathscr{G}(\Gamma)$ 时，则由 $\bar{x}_k > 0, k \in T$ 推出 $\bar{y} \in K_T$ 等。定理证毕。

下面再引入两个记号：

$$\begin{cases} H_{T,U} = K_T \cap Y_U, T \subseteq I, U \subseteq J; \\ G_{R,V} = L_R \cap X_V, R \subseteq J, V \subseteq I. \end{cases} \quad (3.2.6)$$

另外再引入术语，在 $\Gamma = \langle X, Y; A, B \rangle$ 中，若对任何 $T \subseteq I, T \neq \varnothing$ 及任何 $U \subseteq J, U \neq J$，若 $H_{T,U} \neq \varnothing$ 可推出

$$\dim H_{T,U} = n - |T| - |U| \quad (3.2.7)$$

成立，这里dim（・）表示（・）的维数，|・|表示“・”中元素的个数，类似的对于 $R \subseteq J, R \neq \varnothing, V \subseteq I, V \neq I$，有

$$\dim G_{R,V} = m - |R| - |V| \quad (3.2.8)$$

成立，则称对策 Γ 为非退化的。回忆过去，对于 $m \times n$ 矩阵 A，若

$$\begin{bmatrix} & & & -1 \\ & A & & \vdots \\ & & & -1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

的每一个方子矩阵为非奇异的（当然排除最后的行与列处的 0 矩阵），则称 A 为非退化的。另外为方便计空集的维数可设为（所指定的）负数，所以在(3.2.7)中当 $|T| + |U| > n$ 时便知 $H_{T,U} = \varnothing$.

引入术语的目的是想以它们作为工具把 Γ 的平衡点“孤立”

出来，然而在实际情况中这些定义不易掌握，不过矩阵的非退化性却可仅依矩阵的知识来检验。下面的准则是有用的，虽然它是充分的而不是必要的。

定理 3.2.3 若 A 及 B 是非退化的，则 Γ 也是非退化的。

证 首先若 $\bar{y}\in K_T\cap Y_U$，则对一切 $i,\cdots,k\in T$，有 $A_{i\cdot}\bar{y}=\cdots=A_{k\cdot}\bar{y}$，记其值为 $\bar{\lambda}$，从而 $(\bar{y},\bar{\lambda})$ 是下述线性方程组（变量为 $y_1,\cdots,y_n,\lambda$）：

$$\begin{cases} A_{i\cdot}y-\lambda=0, & i\in T \\ y_j=0, & j\in U \\ y_1+\cdots+y_n=1 \end{cases} \tag{3.2.9}$$

的一个解，此方程组的系数矩阵为：

$$\begin{bmatrix} A_{i\cdot} & -1 \\ & \vdots \\ & -1 \\ & 0 \\ B_j & \vdots \\ & 0 \\ 1 \quad \cdots & 1\ 0 \end{bmatrix}_{i\in T,j\in V} \tag{3.2.10}$$

这里 B_j 是表示乙的第 j 个纯策略的 n 维向量。现在若 $n<|T|+|U|$，方程的个数多于变量的个数，因此考察上述矩阵的如下子矩阵：

$$\begin{bmatrix} & -1 \\ A_{i\cdot} & \vdots \\ & -1 \\ & 0 \\ \beta_j & \vdots \\ & 0 \end{bmatrix}_{i\in T,j\in U} \tag{3.2.11}$$

显然此子矩阵的秩等于

$$|U|+\text{rank}\begin{bmatrix} & -1 \\ & \vdots \\ \text{诸 } a_{ij} & \vdots \\ & -1 \end{bmatrix}_{i\in T, j\in U^c}$$

由于$|U^c|=|J-U|=n-|U|<|T|$，故可选取上面(最后的)矩阵的一个阶为$(|U^C|+1)\times(|U^C|+1)$的子矩阵，由于它的秩为$|U^C|+1$，故此矩阵是非退化的，所以(3.2.11)表示的矩阵秩为$|U|+|U^C|+1=n+1$，这说明方程组(3.2.9)中对应于(3.2.11)的子方程组仅有一个平凡解$(\bar{y},\bar{\lambda})=(0,0)$. 从而推论出(3.2.9)根本无解。于是有$H_{T,U}\neq\varnothing\Rightarrow n\geqslant|T|+|U|$.

现设$H_{T,U}\neq\varnothing$，即$|T|+|U|\leqslant n$，选择$\bar{y}\in H_{T,U}$，并再设

$\hat{H}_{T,U}=\{(y,\lambda)\in\mathscr{R}^{n+1}|y\in H_{T,U},\lambda=A_i.y,i\in T\}$ 则有 $\dim\hat{H}_{T,U}=\dim H_{T,U}$. 再记(3.2.9)的解集空间为$\bar{H}_{T,U}$，于是显见

$$\dim\hat{H}_{T,U}\leqslant\dim\bar{H}_{T,U} \tag{3.2.12}$$

这是因为$\hat{H}_{T,U}=\bar{H}_{T,U}\cap\{(y,\lambda)\in\mathscr{R}^{n+1}|y\geqslant 0\}$之故。

再观察(3.2.10)中矩阵的秩，它的秩是：

$$|U|+\text{rank}\begin{bmatrix} & -1 \\ \text{诸 } a_{ij} & \vdots \\ & -1 \\ 1\ \cdots\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{i\in T, j\in U^c}$$

且由于$|T|\leqslant n-|U|=|U^c|$，选取它的一个$(|T|+1)\times(|T|+1)$的子矩阵，故(3.2.10)中的矩阵秩为$|U|+|T|+1$，且

$$\begin{aligned}\dim\bar{H}_{T,U}&=(n+1)-(|T|+|U|+1)\\&=n-|T|-|U|,\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

再由(3.2.12)，便有$\dim\hat{H}_{T,U}\leqslant n-|T|-|U|$.

若给定$\bar{y}\in H_{T,U}$，$\bar{\lambda}=A_i.\bar{y}$，$i\in T$，再定义

$$T^1=\{i|i\in T^C,A_i.\bar{y}=\bar{\lambda}\}$$

$$U^1 = \{j \mid j \in U^C, \bar{y}_j = 0\}$$

此时可证存在 $\bar{y} \in H_{T,U}$ 使 $T^1 = U^1 = \varnothing$，事实上若 $T^1, U^1 \neq \varnothing$，只须证，例如 T^1 的大小可通过选择一个适当的 $\bar{y}$ 而使之确实缩小。为此设 $i_0 \in T^1$，显见 $(\bar{y}, \bar{\lambda}) \in \bar{H}_{T+T^1, U+U^1}$，无疑可找出 $(y^0, \lambda_0) \in \bar{H}_{T+T^1-\{i_0\}, U+U^1}$，而使得 $A_{i.} y^0 = \lambda_0, i \in T+T^1-\{i_0\}, A_{i_0.} y^0 \neq \lambda_0$，因为否则有 $\bar{H}_{T+T^1, U+U^1} \supseteq \bar{H}_{T+T^1-\{i_0\}, U+U^1}$，但这与(3.2.13)矛盾。不失一般性可设 $A_{i_0} \cdot y^0 < \lambda_0$（否则，可取 $-(y^0, -\lambda_0)$）。现置

$(y^\epsilon, \lambda_\epsilon) = (1-\epsilon)(\bar{y}, \bar{\lambda}) + \epsilon(y^0, \lambda_0), 0 \leqslant \epsilon \leqslant 1$，于是

$$A_{i.} y^\epsilon = (1-\epsilon) A_{i.} \bar{y} + \epsilon A_{i.} y^0 = (1-\epsilon)\bar{\lambda} + \epsilon\lambda$$
$$= \lambda_\epsilon, \qquad i \in T+T^1-\{i_0\} \tag{3.2.14}$$

并且类似地有

$$y_j^\epsilon = 0, j \in U + U^1 \tag{3.2.15}$$

此外，有

$$A_{i_0.} y^\epsilon = (1-\epsilon) A_{i_0.} \bar{y} + \epsilon A_{i_0.} y^0 = (1-\epsilon)\bar{\lambda} + \epsilon A_{i_0.} y^0$$
$$< (1-\epsilon)\bar{\lambda} + \epsilon\lambda_0 = \lambda_\epsilon, \qquad 0 < \epsilon < 1 \tag{3.2.16}$$

但另一方面，$A_{i.} \bar{y} < \bar{\lambda}, i \in (T+T^1)^C$，且 $\bar{y}_j > 0, j \in (U+U^1)^C$ 可导出对充分小的 ϵ，有

$$\begin{cases} A_{i.} y^\epsilon < \lambda_\epsilon, i \in (T+T^1)^C \\ y_j^\epsilon > 0, j \in (U+U^1)^C \end{cases} \tag{3.2.17}$$

把(3.2.14)—(3.2.17)组合在一起，对充分小的 ϵ，可找到 $(y^\epsilon, \lambda_\epsilon)$ 使

$$(y^\epsilon, \lambda_\epsilon) \in H_{T+T^1-\{i_0\}, U+U^1},$$
$$(y^\epsilon, \lambda_\epsilon) \notin H_{T+T^1-\{i_0\}+\{i\}, U+U^1}$$

其中 $i \in (T+T^1)^C \cup \{i_0\}$ 为任何指标。所以令 $\bar{y} = y^\epsilon$，便可达到使 T^1 缩小的目的。

最后由前述所得的结果，可设能找到 $(\bar{y}, \bar{\lambda}) \in \hat{H}_{T,U}$ 使满足

$$A_{i.} \bar{y} < \bar{\lambda}, \qquad i \in T^C, \qquad \bar{y}_j > 0, \qquad i \in U^C \tag{3.2.18}$$

但显然(3.2.18)可推出$(\bar{y},\bar{\lambda})$相对于$\bar{H}_{T,U}$的一个整个邻域仍位于$\hat{H}_{T,U}$中。

重新比较(3.2.12)及(3.2.13)，便推出

$$\dim H_{T,U} = \dim \bar{H}_{T,U} = n - |T| - |U|.$$

定理证毕。

推论 设$\Gamma=\langle \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle$是非退化的，则

1. 平衡点的数目是有限的。

2. 若$(\bar{\boldsymbol{X}},\bar{\boldsymbol{Y}})\in\mathscr{G}(\Gamma)$，并设$T=\{i|\bar{x}_i>0\}$，$R=\{j|\bar{y}_j>0\}$，则$|T|=|R|$，且

$\{(\bar{x},\bar{y})\}=(L_R\cap \boldsymbol{X}_{T^C})\times(K_T\cap \boldsymbol{Y}_{R^C})$

3. 若$(\bar{x},\bar{y})\in\mathscr{G}(\Gamma)$，则存在唯一的实数$\bar{\lambda}$使$(\bar{y},\bar{\lambda})$为方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}_{i\cdot}\boldsymbol{y}-\lambda=0, & i\in T \\ \boldsymbol{y}_j=0, & j\in R^C \\ \boldsymbol{y}_1+\cdots+\boldsymbol{y}_n=1 \end{cases} \tag{3.2.19}$$

的唯一解。

推论告诉我们Γ的一切平衡点可通过选取$\boldsymbol{A}$的任何子方阵，并解类似于(3.2.19)的方程而求得。类似地可处理矩阵$\boldsymbol{B}$，直到找出平衡点为止。

推论的证明 由定理3.2.2可知，若$(\bar{x},\bar{y})\in\mathscr{G}(\Gamma)$，则$(\bar{x},\bar{y})\in(L_R\cap \boldsymbol{X}_{T^C})\times(K_T\cap \boldsymbol{Y}_{R^C})$，再由非退化的假设可知$|R|+|T^C|\leqslant m$，$|T|+|R^C|\leqslant n$. 将以上两不等式相加便得$|R|+|T^C|+|T|+|R^C|\leqslant m+n$，而其左边等于$m+n$，故应成立等式，即$|R|=m-|T^C|=|T|$，这证明了推论中2的第一部分。推论中2的第二部分仍可由非退化推出，这是由于

$$\dim(L_R\cap \boldsymbol{X}_{T^C})=m-|R|-|T^C|=0,$$

类似地可推出另一关系。至于推论中3是显然(可参看定理3.2.3的证明)。故$\bar{y}$是由$(a_{ij})_{i\in T,j\in R^C}$所构成的子矩阵所对应的方程组的唯一解。又因为矩阵只有有限多个方阵，所以推论中1可直接推

知。

下面为写起来方便起见，用 $T+i, T-i$ 等分别代替 $T+\{i\}$，$T-\{i\}$ 等。

定理 3.2.4 (Lemke—Howson)设 $\Gamma=\langle \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};A,B\rangle$ 为非退化的，则 $\mathscr{G}(\Gamma)\neq\varnothing$.

还可证平衡点的个数为奇数，但本章不证。

证 称非空集 $H_{T,U}=\{\bar{y}\}$，$|T|+|U|=n$ 为 $\boldsymbol{Y}$ 的一个多面角隅(Polyhedra Corner，简记为 P.C.)，称非空集 $H_{T,U}$，$|T|+|U|=n-1$ 为 $\boldsymbol{Y}$ 的一个多面体边(Polyhedra Edge，简记为 P.E.)。关于 $\boldsymbol{X}$ 可类似的给出定义。

首先，易知任何基向量都是一个 P.C. 事实上，对每个 j，$\beta_j\in\boldsymbol{Y}$ 恰是含在 $n-1$ 个 P.E. 中，而此时任何其他 P.C. 恰含在 n 个 P.E. 中，对于基向量此种陈述是显然的。故我们考察集合：$H_{T,U}=\{\bar{y}\}$，$|T|+|U|=n$，$|T|\geqslant 2$，对任何 $i\in T$，$H_{T-i,U}$，$|T-i|+|U|=n-1$ 是一个 P.E.，它包含$\{\bar{y}\}$. 类似地，对任何 $j\in U$，$H_{T,U-j}$，$|T|+|U-j|=n-1$. 所以至少能找到 n 个包含$\{\bar{y}\}$的 P.E. 若超过 n 个，它们的交集组成一个集合 H_{T^1,U^1}，满足$|T^1|+|U^1|>n$. 这里不论是否有 $y\in H_{T^1,U^1}$，这与非退化相矛盾。又按规定若$\{\bar{y}\}\leqslant H_{T^0,U^0}$，于是

$$\{\bar{y}\}\subseteq H_{T,U}\cap H_{T^0,U^0}=H_{T\cup T^0,U\cup U^0}\overset{\text{记作}}{=\!=\!=}H_{T^1,U^1}$$

并且$|T|+|U|=n$ 可推出 $T^1=T,U^1=U;T^0\subseteq T,U^0\subseteqq U$.

注意基向量 β_j 与其他诸 P.C. 之间的唯一区别是在前述情形中$|T|=1$，故不能由 T 中删去一个指标而得到一个包含 β_j 的 P.E. 此外若 $H_{T,U}$是 P.C. 则对任何 $i\in T$ 及对任何 $j\in U$，在 $H_{T,U}$中恰对应一个 P.E. 即由 $T\cup U$ 中删去一个指标意味着在 $H_{T,U}$中确定一条边。

现设 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$，设 $H_{T,U}=\{\bar{y}\}$及 $G_{R,V}=\{\bar{x}\}$分别是 $\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 中

的 $P.C.$ 于是为识别它们的元素，记 $\mathbf{Z}$ 中的一个 P.C. 为：

$$\bar{z} = (\bar{x},\bar{y}) \in G_{R,V} \times H_{T,V} \subseteq Z$$

类似地，如下类型的集

$$G_{K,V} \times H_{T,U} = \{(x,\bar{y}) \mid x \in G_{R,V}, \{\bar{y}\} = H_{T,U}\}$$

（其中 $G_{K,V}$ 为一 P.E.，$H_{T,U}$ 为一 P.C.）

及

$$G_{R,V} \times H_{T,U} = \{(\bar{x},y) \mid \{\bar{x}\} = G_{R,V}, y \in H_{T,U}\}$$

（其中 $G_{R,V}$ 为一 P.C.，$H_{T,U}$ 为一 P.E.）称为 Z 中的一个 P.E. 另外再记

$$\mathscr{C}_n = \mathscr{C} = \left\{ z \in \mathbf{Z} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_i > 0 \Rightarrow y \in k_i, i \in I \\ y_j > 0 \; x \in L_j, j \in J - n \end{array} \right\}$$

可证若 $\bar{z} \in \mathscr{C}(\Gamma)$，则 $\bar{z} \in \mathscr{C}$ 且 z 为 Z 中的一个 P.C.

显然 $\bar{z} \in \mathscr{C}$. 由于在 $\mathscr{C}$ 的定义中只把平衡点的条件作了减弱（参看引理 3.2.1 后的推论中 1). 为证第二部分，注意定理 3.2.3 的推论中的 2，可知 $T = \{i \mid \bar{x}_i > 0\}$，$R = \{j \mid \bar{y}_j > 0\}$ 具有以下性质：即 $\bar{y} \in K_{T,R^C}$，$|T| + |R^C| = |T| + n - |R| = n$，类似地可讨论 $\bar{x}$，从而断言成立。

此时恰有 $i_0 \in I$ 使 $(\beta_{i_0}, \beta_n) \in \mathscr{C}$，为说明这一点，选取 $i_0 \in I$ 使得：$A_{i_0} \cdot \beta_n \geq A_i \beta_n, i \in I$，则必有 $\beta_n \in K_{i_0}$，且 $(\beta_{i_0}, \beta_n) \in \mathscr{C}$，并且

$$\beta_n \in H_{i_0, J-n}, |\{i_0\}| + |J - n| = n$$

其次 i_0 是唯一确定的，因对 $\beta_n \in K_i, i \neq i_0$，将推出 $\beta_n \in H_{\{i,i_0\}, J-n}$，$|\{i, i_0\}| + |J - n| = n + 1 > n$，这与非退化性矛盾。这就说明恰有 $i_0 \in I$ 使 $(\beta_{i_0}, \beta_n) \in \mathscr{C}$.

再证以下事实：

(a) 若取 $z^0 = (\beta_{i_0}, \beta_n)$ 如上，此时它或是一个平衡点，并从而在 $\mathscr{C}$ 中没有 $P.E.$ 包含 z^0，或者恰巧在 $\mathscr{C}$ 中存在一个 $P.E.$ 含有 z^0.

由于或者有 $\beta_{i_0} \in L_n$，于是因 $z^0 \in \mathscr{C}$，我们有

$$(\beta_{i_0})_i > 0 \Rightarrow \beta n \in K_i, \quad i \in I$$

$$(\beta_n)_j > 0 \Rightarrow \beta_{i_0} \in L_j, \qquad j \in J$$

并且从而 $z^0 \in \mathscr{G}(\Gamma)$（见定理 3.2.1 后的推论的 3）。现在依照开头所指出："对每个 $j, \beta_j \in Y$ 恰含在 $n-1$ 个 $P.E.$ 中，而此时任何其他 $P.C.$ 恰含在 n 个 $P.E.$ 中"。这里恰有 Z 中的 $m+n-2$ 个 $P.E.$ 包含 z^0，这些集是

$$\begin{cases}\{\beta_{i_0}\} \times H_{\{i_0\}, J-n-j}, & j \in J-n \\ G_{\{n\}, I-i_0-i} \times \{\beta_n\}, & i \in I-i_0\end{cases} \qquad (3.2.20)$$

它们之中没有含在 $\mathscr{C}$ 中的；例如设对某个 $j \in J-n$，选取 $(\beta_{i_0}, y) \in \{\beta_{i_0}\} \times H_{\{i_0\}, J-n-j}$，则 $y_j > 0$ 是可行的。但由非退化性 $\beta_{i_0} \in L_n$，$\beta_{i_0} \notin L_j$，$j \neq n$，所以 $\mathscr{C}$ 的条件受到破坏。

另一种情形为 $\beta_{i_0} \notin L_n$，且存在某个唯一确定的 $k, k \neq n$，而使得 $\beta_{i_0} \in L_k$，则在 Z 中含有 z^0 的 $P.E.$，它给出如下：

$$\begin{cases}\{\beta_{i_0}\} \times H_{\{i_0\}, J-n-j}, & j \in J-n, \\ G_{\{K\}, I-i_0-i} \times \{\beta_n\}, & i \in I-i_0\end{cases} \qquad (3.2.21)$$

可证在 $\mathscr{C}$ 中恰巧 $\{\beta_{i_0}\} \times H_{\{i_0\}, J-n-k}$ 为一个包含 z^0 的 $P.E.$，并且当然有 $(\beta_{i_0}, \beta_n) \notin \mathscr{G}(\Gamma)$。

现再证另一事实(b)：若 $\bar{z} \in \mathscr{C}$，$\bar{z} \neq z^0$ 为一 P.C.，则依照是 $\bar{z} \notin \mathscr{G}(\Gamma)$ 还是 $\bar{z} \in \mathscr{G}(\Gamma)$，此时恰有两个或一个 P.E. 在 $\mathscr{C}$ 中含有 $\bar{z}$.

事实上若再记 $T = \{i \in I \mid \bar{x}_i > 0\}$，$R = \{j \in J \mid \bar{y}_j > 0\}$，并先假设 $\bar{y}_n = 0$，显然将由此推出 $\bar{z} \in \mathscr{G}(\Gamma)$，由定理 3.2.3 后的推论，有 $\bar{z} \in G_{R, T^C} \times H_{T, R^C}$，$|R| + |T^C| = m$，$|T| + |R^C| = n$，$|R| = |T|$，因为 $n \in R^C$，故可由 R^C 中删去 n，于是得到一个 P.E. $\{\bar{x}\} \times H_{T-i, R^C}$. 它显然含在 $\mathscr{C}$ 中，在 $\mathscr{C}$ 中的 $\bar{z}$ 处不会有更多的 P.E. 例如对某个 $i \in T$，$\{\bar{x}\} \times H_{T-i, R^C}$ 含有点 $(\bar{x}, \bar{y})$，$\bar{x}_i > 0$，$\bar{y} \notin K_i$，因而它不含在 $\mathscr{C}$ 中。现假设 $\bar{y}_n > 0$，且 $\bar{x} \in L_n$，则 $\bar{z}$ 仍为平衡点。显然 $n \in R$. 若 $|R| = 1$，则 $|T| = 1$（见定理 3.3.2 推论 2），并且 $\bar{z} = (\beta_{i_0}, \beta_n)$. 这是一种

不包含在我们考虑之中的一种情况。所以 $|R|\geqslant 2$，这就是说我们可以通过由 R 中删去 n 而得到一个边：$G_{R-n,T^C}\times\{\bar{y}\}$，这个 P. E. 当然含在 $\mathscr{C}$ 中，并且易于检验它是唯一含有 $\bar{z}$ 者。

最后假设 $\bar{y}_n>0$(即 $n\in R$)且 $\bar{x}\notin L_n$，也即 $\bar{z}\notin\mathscr{G}(\Gamma)$. 由 $\bar{z}\in\mathscr{C}$ 立即可得 $\bar{z}\in G_{R-n,T^C}\times H_{T,R^C}$. 现在 $\bar{z}$ 是一个 $P.C.$，但方程组：

$$|R-n|+|T^C|=m,|T|+|R^C|=n$$

不能同时成立(只要把两者相加即可)，所以或者 $j_1\in R^C$，$j_1\neq n$，使得 $\bar{x}\in L_{j_1}$，或者可寻求一个 i_1，$i_1\in T^C$，使得 $\bar{y}\in K_{i_1}$. 在前一种情况，$\{\bar{z}\}=G_{R-n+j_1,T^C}\times H_{T,R^C}$，并且有两个 P. E.：$G_{R-n+j_1,T^C}\times H_{T,R^C-j_1}$ 和 $G_{R-n,T^C}\times H_{T,R^C}$，它们是含在 $\mathscr{C}$ 中，而在后一种情况，$|\bar{z}|=G_{R-n,T^C}\times H_{T+i_1,R^C}$，并且有两个 P. E. ：$G_{R-n,T^C-i_1}\times H_{T+i_1,R^C}$ 和 $G_{R-n,T^C}\times H_{T,R^C}$. 它们是含在 $\mathscr{C}$ 中，而在后一种情况，$\{\bar{z}\}=G_{r-n,T^c}\times H_{T+i_1R^c}$，并且有两个 P. E：$G_{R-n,T^c-i_1}\times H_{T+i_1,R^c}$；和 $G_{R-n,T^c}\times H_{T,R^c}$. 它们是含在 $\mathscr{G}$ 中。显然在两种情况下在 $\mathscr{C}$ 中不会再有其他在 $\bar{z}$ 处的 P. E.，这样我们便证明了所说的断言(b)。

现在我们来完成定理的证明，其讨论过程如下。若 $z^0=(\beta_{i0},\beta_n)\notin\mathscr{G}(\Gamma)$，则恰有一个在 $\mathscr{C}$ 中的 P. E. 含有 z^0(由(a))。此边为维数为 1 的凸多面体，它有两个端点，其中之一当然是 z^0，离开 z^0 我们当然会达到另一个 P. C. (确切式子从略)。若此 P. C. 不是平衡点，可由此沿着位于 $\mathscr{C}$ 中的一个 P. E. (由(b)，它不是到达边)离开它，并从而达到 $\mathscr{C}$ 中的另一个较远的 P. C.. 按这种方式构成的“道路”将永远不是封闭的。因为道路只有有限多个 P. E.，故道路必然有一个最终的端点，即在 $\mathscr{C}$ 中存在一 P. C，它是某一个 P. E. (即到达边)，由(b)这个 P. C. 必然是一个平衡点。

这样给出的道路确实产生一个平衡点，即它的终点(它可能与始点重合，这在当且仅当 Z^0 确为一个平衡点时出现)。

在 $\mathscr{C}$ 中可能还有更多的 $P.C.$ 由于按我们所构造的方法而不能到达，所以我们还可构造更多的道路，它们的起点为 $\mathscr{C}$ 中的任

何其他 $P.C.$，容易看到任何两条这样的道路都不相交，它们或者具有两个端点，或者是一条闭路，所以它们或有平衡点，或者没有，但对策总有平衡点，前面已找出一个。证毕。

例 1　讨论以下双矩阵对策 $\Gamma=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

解　取 $\beta_3\in Y$，此时 $K_3=\{y\in Y\mid A_3.\,y\geqslant A_K.\,y\}$，也即取 $i_0=3$，并取 $z^0=(\alpha_3,\beta_3)$ 为初始点，但 $z^0\notin\mathscr{G}(\Gamma)$，这是因为 $\alpha_3\in x$，但 $\alpha_3\notin L_3$，因此我们要沿一条边离开 z^0，而 $\mathscr{C}$ 中恰有一条边含有 z^0，这就是 $\{\beta_3\}\times(K_3\cap Y_2)$，这里 $H_{(3),(2)}=K_3\cap Y_2$，记作 P_1. 这条边的终点位于 $(\alpha_3,y^{(1)})$，其中 $y^{(1)}=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$. 但它不是平衡点，因为 $\alpha_3\notin L_{(1,2)}$ 所以应沿 $\mathscr{C}$ 中另一条边离开 $(\alpha_3,y^{(1)})$，此即

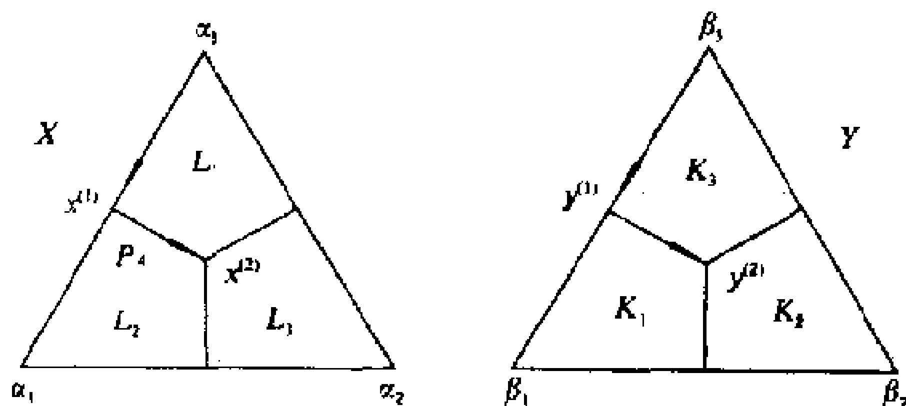


图 3.2.1

$(L_1\cap X_2)\times\{y^{(1)}\}$，沿此到达 $(x^{(1)},y^{(1)})$，其中 $x^{(1)}=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$. 然而此点不是平衡点。再把 $L_1\cap X_2$ 记作 P_2，下一步沿 $\{x^{(1)}\}\times\{K_{(1,3)}\cap Y_{\varnothing}\}$ 而到达 $(x^{(1)},y^{(2)})$，其中 $y^{(2)}=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，但 $(x^{(1)},y^{(2)})\notin\mathscr{G}(\Gamma)$. 最后由此点沿 $(X_{\varnothing}\cap L_{12})\times\{y^{(2)}\}$ 而到达 $(x^{(2)},$

$y^{(2)}$)，其中 $x^{(2)}=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，此 $(x^{(2)},y^{(2)})\in\mathscr{G}(\Gamma)$，将此过程画于图 3.2.1 中，并标明了 K_3，L_3 等所示之策略集的域。解毕。

例 2 讨论双矩阵对策 $\Gamma=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & -4 & 5 & 6\\ 3 & 4 & 3 & -6\end{pmatrix}$$

这里 $m=2$，$n=4$，所以 x 为 1 维的，而 y 为 3 维的向量。

由于 $xB_{\cdot i}=x_1b_{1i}+x_2b_{2i}=x_1b_{1i}\times(1-x)b_{2i}$ 为在 X 上的一个仿射函数，故可通过计算如下两个值：$\alpha_1B_{\cdot i}=b_{1i}$，$\alpha_2B_{\cdot i}=b_{2i}$ 来作图，例如 $xB_{\cdot 1}=-x_1+3x_2$ 等等。类似可写出 $xB_{\cdot 2}$，$xB_{\cdot 3}$，$xB_{\cdot 4}$，并在平面上画出它们的图形（见图 3.2.2）。此时不唯作出以下各个集合：

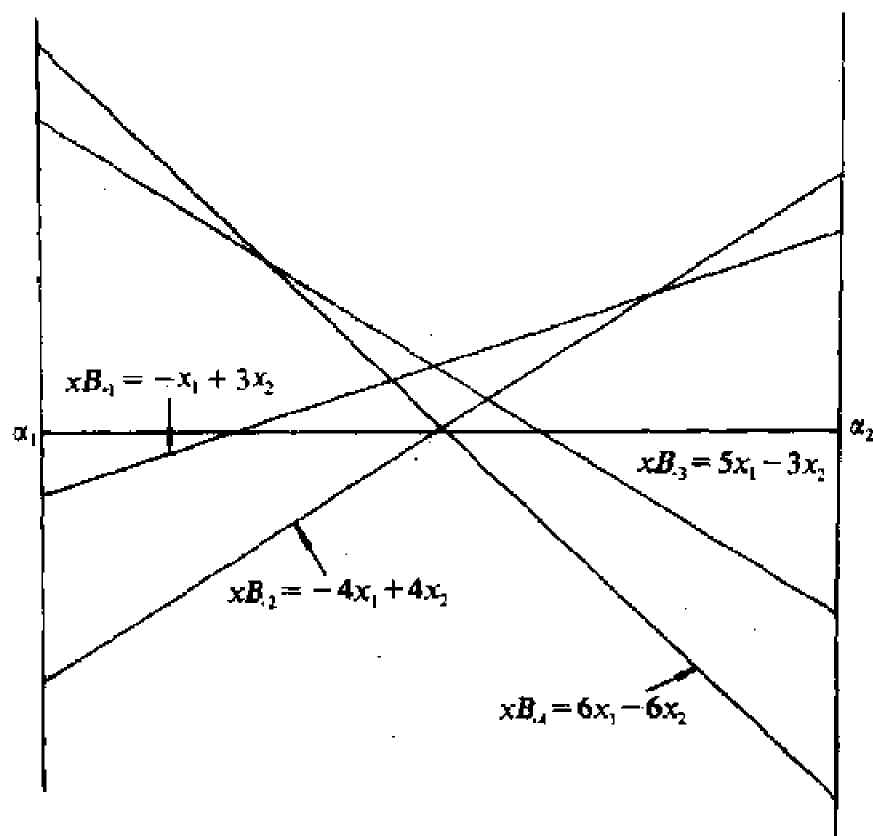


图 3.2.2

$$L_1=\left\{x\in X\mid \frac{1}{2}\leqslant x_2\leqslant\frac{3}{4}\right\}=\left\{x\in X\mid \frac{1}{4}\leqslant x_1\leqslant\frac{1}{2}\right\},$$
$$L_2=\left\{x\in X\mid \frac{3}{4}\leqslant x_2\leqslant 1\right\}=\left\{x\in X\mid 0\leqslant x_1\leqslant\frac{1}{4}\right\},$$
$$L_3=\left\{x\in X\mid \frac{1}{4}\leqslant x_2\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\left\{x\in X\mid \frac{1}{2}\leqslant x_1\leqslant\frac{3}{4}\right\},$$
$$L_4=\left\{x\in X\mid 0\leqslant x_2\leqslant\frac{1}{4}\right\}=\left\{x\in X\mid \frac{3}{4}\leqslant x_1\leqslant 1\right\}.$$

但另一方面 Y 是一个三面体，且不难验证以下各点：$y^{(1)}=(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$，$y^{(2)}=(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2})$，$y^{(3)}=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0)$，$y^{(4)}=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ 是下述超平面：$\{y\in \boldsymbol{R}^4\mid A_1.y=A_2.y\}$的元素。显见可给出 K_1,K_2 如下：

$$K_1=\{y\in Y\mid A_1.y\geqslant A_2.y\},$$
$$K_2=\{y\in Y\mid A_2.y\geqslant A_1.y\},$$

且 $\beta_1,\beta_2\in K_1,\beta_3,\beta_4\in K_2$，而上面的超平面把 Y 划分为两部分，它们画在图 3.2.3 中。

算法步骤如下：(1)取 $z^0=(\alpha_2,\beta_4)$，这是因为 $\beta_4\in K_2$；(2)再取 $z^1=(\alpha_2,y^{(1)})$，因 $\alpha_2\in L_2$，而 $y^{(1)}=(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$；(3)进至 $z^2=(x^{(1)},y^{(1)})$，因 $y^{(1)}\in K_{(1,2)}$而 $x^{(1)}=(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$；(4)再进至 $z^3=(x^{(1)},y^{(2)})$，因为 $x^{(1)}=L_{(1,2)}$而 $y^{(2)}=(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2})$；(5)再进至 $z^4=(x^{(2)},y^{(2)})$，因 $y^{(2)}\in K_{(1,2)}$而 $x^{(2)}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$；(6)最后来到 $z^5=(x^{(2)},y^{(3)})$，这里 $z^5\in\mathscr{G}(\Gamma)$，故终止，其中 $x^{(2)}\in L_{(1,3)}$而 $y^{(3)}=(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0)$。

上面两例说明了算法的过程。

至于 2×2 矩阵 A,B 的算法，当然要简单得多。

若把 $m\times n$ 的非退化矩阵的全体的集记作 $\mathscr{M}=\mathscr{M}_{(m,n)}\subseteq\boldsymbol{R}^{mn}$，

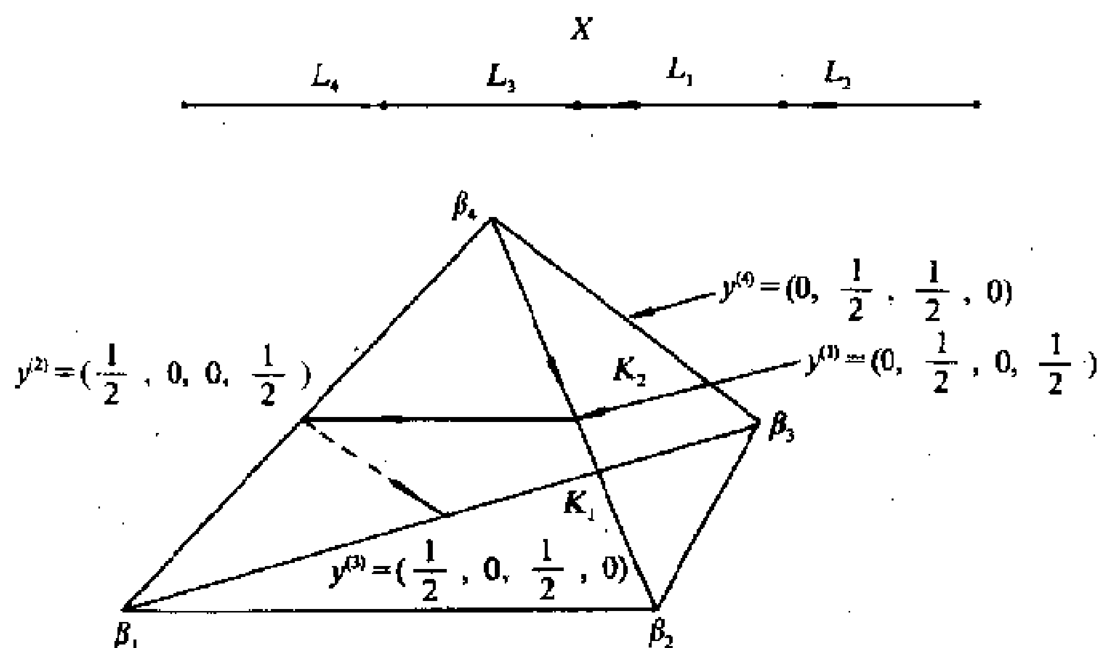


图 3.2.3

可证：

定理 3.2.5 $\mathscr{M}$ 是开集并在 R^{mn} 中为稠密。

一旦证明了定理，在每次进行计算时，总可取到有关的元素。

定理的证明　对于任何矩阵 A，令

$$\hat{A}=\begin{bmatrix} A & & & -1 \\ & & & \vdots \\ & & & -1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, A^0=\begin{bmatrix} A_{2\cdot} \\ \vdots \\ A_{m\cdot} \end{bmatrix}$$

$$A^{I_0J_0}=(a_{ij})_{i\in I_0, j\in J_0}$$

这里 I_0，J_0 分别是行指标与列指标集的子集。

显然 $\hat{A}$ 的一个方子阵的行列式是 A 的一个连续函数。若对某个 A，对应的行列式不为零，则在 A 的关于一切矩阵的集中的某个邻域中也有非零的行列式，这就推出 $\mathscr{M}$ 是开集。

为证其稠密性，我们采用归纳法。令 $m=n=1$，则 $A=(a)$，且

$$\hat{A}=\begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其中仅有 $A=(0)$ 为退化矩阵(注意我们并不要求最后一行与最后一列的元素构成一个非奇异矩阵)，所以 $\mathscr{M}=\mathscr{M}_{(1,1)}=[(a)|a\neq 0]$，而它在 $\boldsymbol{R}^1$ 中显然稠密。其次，设 m,n 为任意，并假设 $\mathscr{M}_{(m-1,n)}$ 在 $\boldsymbol{R}^{(m-1)n}$ 中稠密，要证对任何 $m\times n$ 矩阵 A 及任何 $\varepsilon>0$ 存在一个非退化的 $m\times n$ 矩阵 D 使得 $|A-D|<\varepsilon$，这里 1.1 当然表示 $\boldsymbol{R}^{mn}$ 中的欧几里德范数，这样便可完成由 $(m-1,n)\to(m,n)$ 的归纳步骤。类似可仿此讨论 $(m,n-1)\to(m,n)$，因而可证明定理。为此，给定一个 $m\times n$ 矩阵 A 及 $\varepsilon>0$，依归纳法假设，有 $(m-1)\times n$ 矩阵：

$$C=\begin{bmatrix} C_{2\cdot} \\ \vdots \\ C_{m\cdot} \end{bmatrix}$$

并设它非退化，且满足 $|C-A^0|<\frac{1}{2}\varepsilon$，其中 A^0 为 A 中去掉第一行后的矩阵，再考虑矩阵 F

$$F\stackrel{\text{def}}{=\!=}\begin{bmatrix} A_{1\cdot} \\ C_{2\cdot} \\ \vdots \\ C_{m\cdot} \end{bmatrix}$$

显然 $|F-A|<\frac{1}{2}\varepsilon$. 现通过对 F 的第一行 $A_{1\cdot}$ 作微小变动而进行修改，构成新向量 $D_{1\cdot}$，使 $D_{1\cdot}$ 与 C 在一起构成一个非退化矩阵 D

$$D\stackrel{\text{def}}{=\!=}\begin{bmatrix} D_{1\cdot} \\ C_{2\cdot} \\ \vdots \\ C_{m\cdot} \end{bmatrix}$$

且设它满足$|D-A|<\varepsilon$. 然后选取两个如下的指标集：$I_0\subseteq I+\{m+1\}$，$J_0\subseteq J+\{n+1\}$。$|I_0|=|J_0|\overset{\text{def}}{=\!=}k$，由它们可唯一确定$\hat{A}$的一个子方阵$\hat{A}^{I_0J_0}$，其中设$k\geqslant 2$，现在若$1\notin I_0$，则为保证$\hat{F}^{I_0J_0}$为非奇异，根本不必对$A_{1\cdot}$进行修改。所以应假设$1\in I_0$，并令$a^1\overset{\text{def}}{=\!=}(a_{1j})_{j\in J_0}=\hat{A}_{1\cdot}^{I_0J_0}$，此时又可分为：

情形 1　$n+1\notin J_0$，这时的$k-1$个行记为：

$$z^i\overset{\text{def}}{=\!=}\hat{F}_{i\cdot}^{I_0J_0}=\hat{C}_{i\cdot}^{(I_0-\{1\})J_0}\qquad i\in I_0-\{1\}\tag{3.2.22}$$

依归纳法假设，它们与R^{J_0}中的向量是线性无关的。选取$x\in R^{J_0}$使$|x-a^1|<\frac{\varepsilon}{4}$，且使此$x$不含在由诸向量$z^i(i\in I_0-\{1\})$张成的$k-1$维子空间$E^{I_0J_0}$之中，这样的$x$总是存在的，因为对于所作的有效选择总可以$a^1$为球心构造一个球，使整个球避开$E^{I_0J_0}$. 显然$k\times k$矩阵$\begin{pmatrix}x\\z^i\end{pmatrix}_{i\in I_0-\{1\}}$
是非奇异的。现在定义

$$a_{1j}^1=\begin{cases}x_j, & j\in J_0\\ a_{1j}, & j\in J-J_0\end{cases}$$

并定义$A_{1\cdot}'=(a_{11}',\cdots,a_{n1}')$，则

$$C^1\overset{\text{def}}{=\!=}\begin{bmatrix}A_{1\cdot}^1\\C_{2\cdot}\\\vdots\\C_{m\cdot}\end{bmatrix}$$

满足$|C^1-A|<\frac{3}{4}\varepsilon$，并且$\hat{C}^{1I_0J_0}$为非奇异。于是可得如下事实："可对$A_{1\cdot}$的坐标$(a_{1j})_{j\in J_0}$通过微小变动（例如$\frac{\varepsilon}{4}$）对$A_{1\cdot}$进行修改而使所得的限制于$R^{J_0}$的结果向量$A_{1\cdot}'$避过子空间$E^{I_0J_0}$，并从而使结果矩阵$\hat{C}^{I_0J_0}$为非奇异。"

情形 2　$n+1\in J_0$，于是 $a^1=A_1^{I_0 J_0}\neq(a^1,1)=\hat{A}_1^{I_0 J_0}$，考虑如下的 $k-1$ 行：

$$W^i \stackrel{\text{def}}{=\!=} \hat{F}_i^{I_0(J_0-\{n+1\})}, \qquad i\in I_0-\{1\} \tag{3.2.23}$$

它们在 $R^{J_0-\{n+1\}}$ 中为线性无关。选取 $X^1\in R^{J_0-\{n+1\}}$，使 $|x^1-a^1|<\frac{\varepsilon}{4}$，且使 x^1 不在由诸向量 $W^i(i\in I_0-\{1\})$ 所张成的 $K-1$ 维仿射流形之中，x^1 有唯一的表达式：

$$x^1=\sum_{i\in I_0-\{1\}}\lambda_i W^i$$

其中 $\sum\lambda_i\neq 1$，并且从而 $(x^1,-1)\neq\sum_{i\in I_0-\{1\}}\lambda_i(W^i,-1)$，这就推出矩阵

$$\begin{bmatrix} x^1 & -1 \\ W^i & -1 \end{bmatrix}_{i\in I_0-\{1\}}$$

的秩为 k.

再用 x_j 代替 $a_{1j}(j\in J_0-\{n+1\})$ 的方法来修改 $A_{1\cdot}$，从而也可得到类似情况 1 的末尾处所叙述的事实结论。当然对于 $K=1$ 是显然的。

我们可稍微直观的作些说明(因若作形式的讨论将非常乏味，但读者可以自己给出确切的讨论)。

给定方阵(由 I_0,J_0 确定)，可把 F 修改成 C^1，使得 $\hat{C}^{1I_0J_0}$ 为一个非奇异的(通过避开某个线性子空间来做到)，所以可通过避开有限多个子空间(每一个对应于一个方子阵)的方式将 F 修改为 D，使得每个 $\hat{D}^{I_0J_0}$ 都是非奇异的，因为修改总是在半径为 $\varepsilon/2^l$ 的整个球内进行，所以避开一个真子空间总是可能的，所以 D 是非退化的，并且 $|A-D|<\varepsilon$. 证毕。

易于推知

定理 3.2.6　对于双矩阵对策 $\Gamma=\langle X,Y;A,B\rangle$，$\mathscr{G}(\Gamma)\neq\varnothing$.

证 由定理 3.2.5，可找出一个非退化的双矩阵对策序列 $\{\Gamma^n=\langle X,Y;A^n,B^n\rangle\}_{n\in N}$使得

$$A^n\to A,B^n\to B,n\to\infty.$$

而由定理 3.2.4，对一切 $n\in N$，$\mathscr{G}(\Gamma^n)\neq\varnothing$，所以由引理 3.2.2，知 $\mathscr{G}(\Gamma)\neq\varnothing$. 证毕。

§3 谈判问题

局中人之间也可以互相联合、共同控制对策的进程，分享共同利益。这就需要局中人之间进行协商、谈判。

不妨观察两个谈判者在进行谈判时的一般过程并找出规律。可以设想存在一系列可供双方选择的谈判方案，它们都是由局中人双方提出自己的要求以及相应措施（策略、行动等）形成的。这些方案应该在实际中是可行的。所有这些可行方案的全体构成的集合称为可行集(feasible set)，记为 S. 由于在每一个方案中，局中人甲、乙可以分别获得的利益记作 u,v，因此每个方案可以用 (u,v)表示，并且写作 $(u,v)\in S$，这意味着方案 (u,v)是可行的。双方都有一个谈判的基点，即双方认为都不能再作让步的收益，设它们分别是 u^*、v^*. 双方分别以 u^*、v^* 为基础进行谈判。在对策 $\Gamma=\langle X,Y;A,B\rangle$中，通常以双方分别采取各自的保守策略时所得的收益为基点，即取：

$$\begin{cases}u^*=\max\limits_{x\in X}\min\limits_{y\in Y}xAy^T\\ v^*=\min\limits_{y\in Y}\max\limits_{x\in X}xBy^T\end{cases}\qquad(3.3.1)$$

并把谈判问题记作 (S,u^*,v^*)。经过谈判双方的讨价还价，或者由一位仲裁人的裁定，最后得到一个能为双方共同接受的方案 $(\bar{u},\bar{v})$。由 (S,u^*,v^*)到最后达到 $(\bar{u},\bar{v})$的过程看作一种映射，记此

映射为φ,于是此过程可写作

$$\varphi((S,u^*,v^*)=(\bar{u},\bar{v}) \tag{3.3.2}$$

称$(\bar{u},\bar{v})$为谈判解(Bargaining Solution)。

怎样求出$(\bar{u},\bar{v})$?观察谈判者的行为可以出现一些共同遵守的规律,把它们作为公理。下述公理系是由(John Nash)首先提出的。

公理 1(个体合理性) $(\bar{u},\bar{v})\geqslant(u^*,v^*)$.

公理 2(可行性) $(\bar{u},\bar{v})\in S$.

公理 3(Pareto 最优性) 若$(u,v)\in S$,且$(u,v)\geqslant(\bar{u},\bar{v})$,则$(u,v)=(\bar{u},\bar{v})$.

公理 4(无关方案的独立性) 若$(\bar{u},\bar{v})\in T\subset S$,且$(\bar{u},\bar{v})=\varphi(S,u^*,v^*)$,则$(\bar{u},\bar{v})=\varphi(T,u^*,v^*)$.

公理 5(线性变换的无关性) 设T是S经由如下线性变换

$$\begin{cases}u^1=\alpha_1u+\beta_1\\ v^1=\alpha_2v+\beta_2\end{cases} \tag{3.3.3}$$

而得到的,如果$\varphi(S,u^*,v^*)=(\bar{u},\bar{v})$,则必有

$$\varphi(T,\alpha_1u^*+\beta_1,\alpha_2v^*+\beta_2)=(\alpha_1\bar{u}+\beta_1,\alpha_2\bar{v}+\beta_2) \tag{3.3.4}$$

其中,α_1,α_2为正常数,β_1,β_2为常数。

公理 6(对称性) 若S使$(u,v)\in S\Leftrightarrow(u,v)\in S$,并设$u^*=v^*$,以及$\varphi(S,u^*,v^*)=(\bar{u},\bar{v})$,则$\bar{u}=\bar{v}$.

以上 6 条公理中,公理 1、2、3 显然是必要的。公理 4 表明如果把可行集扩大而得到一个新的谈判问题,且新问题的解$(\bar{u},\bar{v})$仍在原谈判问题的可行集T之中,那么此$(\bar{u},\bar{v})$也必是原谈判问题的解。换言之,扩大的谈判集中新增的方案与谈判实际上无关(当然,若解$(\bar{u},\bar{v})$不在原来的可行集T中,那就是另一个问题)。公理 5 说明双方如果衡量尺度不一,但其客观的价值并不能因此而改变。公理 6 则主要体现公平原则,即若双方的地位、实力相同、策略相同而且谈判的基点也一致的话,最后所得谈判结果中的利益$\bar{u}$、$\bar{v}$

应该相同。另外还有一条公理，即

公理 7(单调性) 若 $T\subset S$，则

$$\varphi(T,u^*,v^*)\leqslant\varphi(S,u^*,v^*)$$

不幸公理 7 与公理 2,3 不相容，所以一般不考虑这一条。此时可证：

定理 3.3.1 对于所有谈判问题 (S,u^*,v^*)，存在满足公理 1—6 的唯一函数 φ.

在证明定理之前，先观察一些事实：可证对于任何点 $(u,v)\in S$，若它们均满足 $u>u^*,v>v^*$，则函数

$$g(u,v)=(u-u^*)(v-v^*) \tag{3.3.5}$$

在集 S 上存在唯一的极大点 $(\bar{u},\bar{v})$，这是显然的，故略去证明。其次，假设同上，对于 $S,(u^*,v^*),(\bar{u},\bar{v})$，如上述，并令

$$h(u,v)=(\bar{v}-v^*)u+(\bar{u}-u^*)v \tag{3.3.6}$$

可证若 $(u,v)\in S$，则必有不等式 $h(u,v)\leqslant h(\bar{u},\bar{v})$ 成立。因为若设 $(u,v)\in S$，而 $h(u,v)>h(\bar{u},\bar{v})$，并设 $0<\varepsilon<1$，由于 S 的凸性，并设 $(u^1,v^1)\in S$，其中 $u^1=\bar{u}+\varepsilon(u-\bar{u}),v^1=\bar{v}+\varepsilon(v-\bar{v})$，由于 h 的线性性，故 $h(u-\bar{u},v-\bar{v})>0$. 现在

$$g(u^1,v^1)=g(\bar{u},\bar{v})+\varepsilon h(u-\bar{u},v-\bar{v})+\varepsilon^2(u-\bar{u})(v-\bar{v})$$

令 $\varepsilon\to 0$，最后一项可忽略不计，因而导出 $g(u^1,v^1)>g(\bar{u},\bar{v})$，但这与 g 在 $(\bar{u},\bar{v})$ 处取极大矛盾，所以必有 $h(u,v)\leqslant h(\bar{u},\bar{v})$ 成立。

上面所证的事实说明连接点 $(\bar{u},\bar{v})$ 与 (u^*,v^*) 的直线的斜率是负的，且集 S 的一个支撑。换言之 S 的全部都落在直线的一方。

下面来证定理。设对任何 $(u,v)\in S$，均有 $u>u^*,v>v^*$. 前已指出(3.3.5)中定义的 $g(u,v)$ 存在极大点 $(\bar{u},\bar{v})$。显然 $(\bar{u},\bar{v})$ 满足公理 1、2，这从函数的构造便可看出，它也满足公理 3。因若设 $(u,v)\geqslant(\bar{u},\bar{v})$，但 $(u,v)\neq(\bar{u},\bar{v})$，于是便有 $g(u,v)>g(\bar{u},\bar{v})$，此与 $(\bar{u},\bar{v})$ 为 $g(u,v)$ 的极大点矛盾。它也满足公理 4，因若它使 $g(u,v)$ 在 S 上取极大，它当然也在 S 的较小的集 T 上使 g 取极大。它

也满足公理 5，因若令 $u^1=\alpha_1 u+\beta_1$，且 $v^1=\alpha_2 u+\beta_2$，于是

$$g(u^1,v^1)=(u^1-(\alpha_1 u^*+\beta_1))(v^1-(\alpha_2 v^*+\beta_2))$$
$$=\alpha_1\alpha_2 g(u,v)$$

所以若 $(\bar{u},\bar{v})$ 使 $g(u,v)$ 取极大，则 $(\bar{u}^1,\bar{v}^1)$ 也必使 $g(u^1,v^1)$ 取极大。最后 $(\bar{u},\bar{v})$ 也满足公理 6，事实上若 S 是对称的（公理 6 的含义之下），且 $u^*=v^*$，则 $(\bar{u},\bar{v})\in S$，但显然 $g(\bar{u},\bar{v})=g(\bar{v},\bar{u})$ 这是由于 $(\bar{u},\bar{v})$ 是 $g(u,v)$ 的唯一的极大点，这就推出 $(\bar{u},\bar{v})=(\bar{v},\bar{u})$，也即 $\bar{u}=\bar{v}$，于是我们推出 $(\bar{u},\bar{v})$ 满足公理 1－6. 下面证明它是满足上述诸公理的唯一的规则（函数）。现设 $(\bar{u},\bar{v})$ 是如上所确定的，考虑集合。

$$U=\{(u,v)\,|\,h(u,v)\leqslant h(\bar{u},\bar{v})\}$$

由前面开头所证之事实，有 $S\subset u$，现设 T 是由 U 经过线性变换

$$u^1=\frac{u-u^*}{\bar{u}-u^*},\ v^1=\frac{v-v^*}{\bar{v}-v^*} \qquad (3.3.7)$$

而得，不难看出此 T 即是集合 $\{(u^1,v^1)\{u^1+v^1\leqslant 2\}$，并且 $u^{*\prime}=v^{*\prime}=0$，由于 T 是对称的，故由公理 6，所求的解必在直线 $u'=v'$ 上，由公理 3 它必为点 $(1,1)$，而由变换 (3.3.7) 之逆，利用公理 5，(U,u^*,v^*) 的解必为 $(\bar{u},\bar{v})$，但是由于 $(\bar{u},\bar{v})\in S$，这就推出 $(\bar{u},\bar{v})$ 必为 (S,u^*,v^*) 的解。

现设不存在点 $(u,v)\in S$ 使 $u>u^*,v>v^*$，由 S 的凸性可知，若对任何 $(u,v)\in S$，其中 $u>u^*,v=v^*$，就不可能有 $(u,v)\in S$ 具有 $v>v^*$. 在这些条件下可简单地令 $(\bar{u},\bar{v})$ 为 S 内诸点中在约束条件 $v=v^*$ 之下使 u 取极大的点，类似的，若对 $(u,v)\in S$ 具有 $u=u^*,v>v^*$，则不可能有 $(u,v)\in S$ 具有 $u>u^*$. 若令 $(\bar{u},\bar{v})$ 为 S 中在约束条件 $u=u^*$ 之下使 v 取极大的点，不难验证此解满足诸公理，并且不难看到公理 1—3 不可能允许有其他解。证毕。

此定理说明满足 Nash 诸公理者有唯一的解。若集 S 有光滑的边界，则解 $(\bar{u},\bar{v})$ 在 S 的边界上。在 $(\bar{u},\bar{v})$ 作 S 的切线（S 上

Pareto 集的范围内的点都有可能成为 Nash 谈判解)，此切线的斜率可以代表局中人之间的效益转换比率。Nash 的谈判解事实上是在所增加的效益方面按效益转换的适当比例在局中人之间进行分配。自然，由于未假设效益可以按线性方式转换，

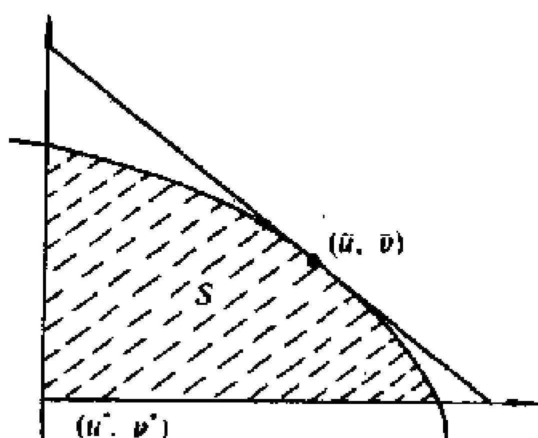


图 3.3.1

所以在 S 的 Pareto 边界部分中只可能有一点符合所给效益转换的比例。当然在具有线性的可转换效益的情况下，问题会变得简单。事实上可假设转换效益的比例(在必要情况下可以改变效益的度量单位)。再设 k 为局中人双方联合在一起时所能取得的最大效益，于是 S 应包括位于直线 $u+v=k$ 上或其下方以及 (u^*, v^*) 的上方、右方的区域。此时对应的 Nash 解应为

$$\begin{cases} \bar{u} = \dfrac{u^* - v^* + k}{2} \\ \bar{v} = \dfrac{v^* - u^* + k}{2} \end{cases} \tag{3.3.8}$$

不难验证 $\bar{u}+\bar{v}=k$，并且此时 $\bar{u}-\bar{v}=u^*-v^*$，所以在这种情况下，这两个局中人的相对地位就维持下来，即使在他们的效益可能增加之时也是如此。

但是在谈判之中一方为了达到自己的目的，可能利用自己的有利态势或地位来“要挟”或“讹诈”对方。这导致讨论“恐吓”(Threat)问题。对于恐吓，Nash 提出如下的谈判模式：1)甲宣告要采取一种恐吓(或讹诈)策略 x；2)假设此时乙也宣布将要采取一种恐吓策略 y(不论他是否知道甲关于 x 策略的实质)；3)既然如此，甲、乙双方分别宣布采取策略 x 和 y，那么问题就变成双方各

以 x 和 y 为谈判的基点进行谈判，如果恐吓或讹诈不成、谈判破裂，甲、乙只好分别执行 x 和 y，从而取得相应的收益。

这样一来，依 Nash 公理，此时应考虑：

$$g(u,v) = (u - xAy^T)(v - xBy^T) \qquad (3.3.9)$$

当然此时应在 S 中受到约束：$u \geq xAy^T, v \geq xBy^T$ 的那部分域中来讨论问题。不难证明：

定理 3.3.2 任何双矩阵对策至少有一个关于恐吓策略对 (x,y) 的平衡点。

定理 3.3.3 若 (x^1,y^1) 及 (x^{11},y^{11}) 是双矩阵对策关于恐吓策略的两个平衡点，则 (x^1,y^{11}) 及 (x^{11},y^1) 也是平衡点。

以上两个定理证明从略。

不难推出在双方效益转换比例为 1：1 时，恐吓对策的仲裁解为：

$$\begin{cases} \bar{u} = \dfrac{xAy^T - xBy^T + k}{2} \\ \bar{v} = \dfrac{xBy^T - xAy^T + k}{2} \end{cases} \qquad (3.3.10)$$

这里 k 是指两局中人在一起工作时所能取得的最大效益。撇开这一部分，可以看出甲是努力使 $x(A-B)y^T$ 极大化，而乙却在使 $x(B-A)y^T$ 极大化。所以此时甲、乙实际上在进行一个以 $A-B$ 为支付矩阵的零和对策。

例 1 讨论双矩阵对策 $\Gamma = \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}; \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle$，其中 (A,B) 为：

$$\begin{pmatrix} (1,4) & (-4/3,4) \\ (-3,-1) & (4,1) \end{pmatrix}$$

解 在不考虑效益转移的情况下，由诸 (a_{ij},b_{ij}) 为坐标的顶点构成一个四边形，并记此四边形为 S. 显然局中人甲、乙双方的保守谈判基点——也称为安全基点，依(4.3.1)计算，应为(0,0). 相应的混合策略分别为：$x=(3/4,1/4)$，$y=(1/2,1/2)$. 假如按

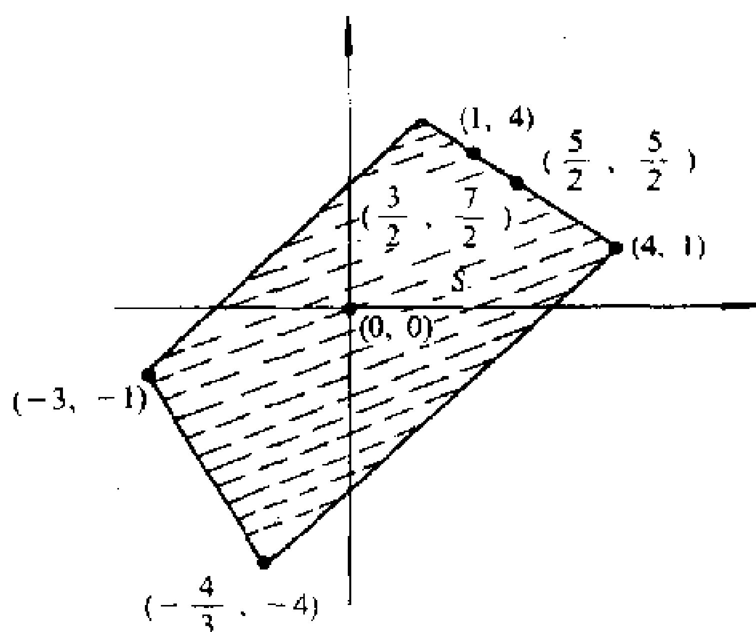


图 3.3.2

Nash 的谈判公理模式讨论，由于在 S 中(0,0)的右上方域中讨论时，域近似对称，所以 Nash 仲裁解为(5/2,5/2)(可通过计算得到)。然而仔细观察矩阵 A、B，乙发现自己稍微处于有利的地位。因若乙坚持采用其第一个纯策略 β_1，甲确实没有更多的反抗能力，因他若采取 α_1，则正是乙所希望的，若采取纯策略 α_2，乙虽受损失所得为 −1，而这时甲却损失更多，即 −3，所以乙会采取恐吓策略。相应的甲也会采取对策，所以应作为恐吓对策进行讨论，依上面分析应考虑支付为 $A-B$ 的零和对策，并设效益转移率为 1：1，由于

$$A-B=\begin{pmatrix} -3 & 8/3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

同时双方联合在一起的共同所得效益为 5，采用(3.3.10)，可求出仲裁恐吓解为 $\bar{u}=3/2,\bar{v}=7/2$。

§ 4 具有旁支付与不具旁支付时的合作对策

上面讨论的双矩阵对策的合作情形中出现过可转移效益(Transferable Utility，今后简记为 TU)情形，它可理解为在对策的“形式”规则范围之外由局中人之间预先协议而给出的一种支付(某种形式的“补偿”)这类支付称为旁支付(Side Payment)。我们还应研究另一种情形，即不具有旁支付的情形，此种情形简记作 NTU(Nontransferable utility)对策。

如何看待 TU 的假设？不妨设想把可行集加以扩张，即在(a_{ij}, b_{ij})的基础上把诸向量扩大为$(a_{ij}+s, b_{ij}-s)$，这里 s 为任何实数，其中 $i\in I, j\in J$，例如考虑如下的对策：$\Gamma=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，其中$(A, B)$为：

$$\begin{pmatrix} (2,3) & (5,3) \\ (7,4) & (3,5) \end{pmatrix}$$

假如甲乙两人同意合作，局中人之间所可能进行选择的混合策略位于图 3.4.1 中 45°斜线带域中，这样的域可称为具旁支付的合作可行域，或简称此域为 TU 可行集(TU feasible set)。显然此集合所表示的域也包含非合作可行域，稍后还可推出它也包含 NTU 可行域。

可以设想局中人为分享他们合作时可能获得尽可能大的“和”效益而进行谈判并达成协议，此类最大和效益位于 TU 可行域 S 的右上方的边界上，也即 S 的 Pareto 边界上。以此例而论，它位于点 $M(7,4)$处。如果如此，我们就不会为互相合作以便取得联合最大效益达成协议而对处于不利地位的局中人付给某种补偿——也即某类形式的边支付而感到惊奇。但何时他们会达成一致给予另一方以旁支付？因为若任何一方的局中人认为所得旁支付是不能

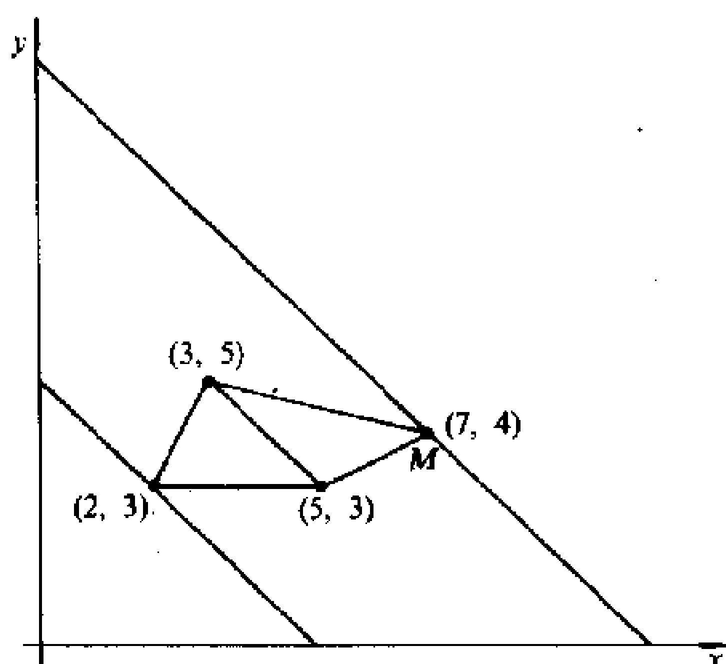


图 3.4.1

接受的，他会威胁说不参与合作。Nash 的合作解是一种可以考虑的方案，它可提供某种合理的折衷方案以便使合作能继续下去。

为说明有关概念，现举一例。设甲、乙共同拥有一套较小的公寓住房，此住房对一个人来说已足够大，然而由于共同拥有所有权之故，没有那一方能单独搬进去住(除非他们达成一致协议)。然而此套住房就其所处地段位置、环境而言更适合于甲，不妨作如下的估价：对于甲，此房值￥600/m²，对于乙，值￥500/m². 我们不妨用对策的方法分析此问题。此时甲、乙分别有三个策略：(1)请求对方同意自己搬入住房；(2)如果对方请求，准备予以同意；(3)不作任何安排与处理。这时可构造双矩阵如下：

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{乙} \\
 & \begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \end{array} \\
\text{甲}\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} & \begin{bmatrix} (a,b) & (600,0) & (0,0) \\ (0,500) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{bmatrix}
\end{array}
$$

这里(a,b)中的a,b是两个未确定的正数，其总值不超过¥600/m²，它代表双方同时决定采取策略(1)时此住宅的最后期望价值。而这个值对于问题的解并不重要。

可以想见合作时的值为$\varphi=(300,300)$，这是甲向乙支付的报偿，它是当协议破裂时关于此住房双方有相同的损失的合理价格。

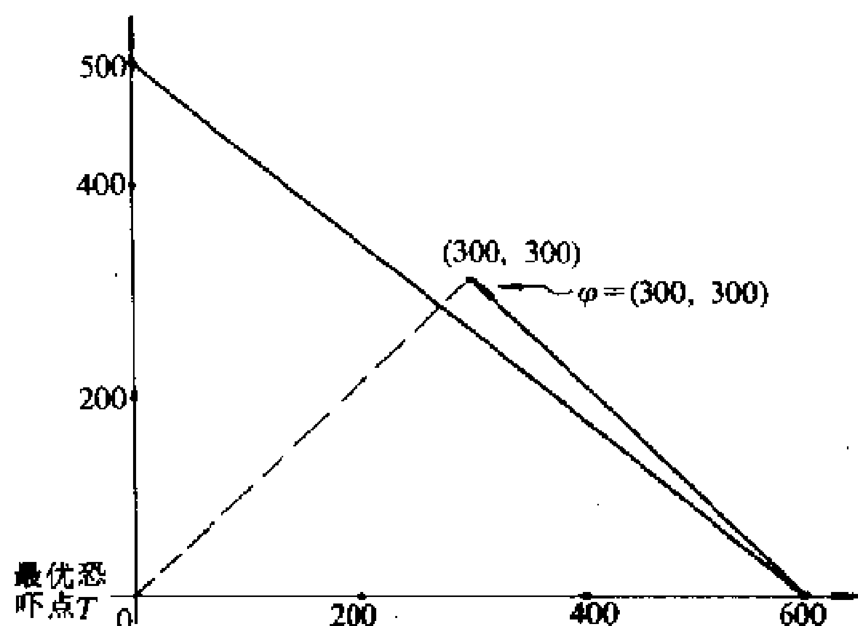


图 3.4.2

现对双矩阵(A,B)构造两个如下的辅助矩阵：

$$
\begin{cases}
\text{和矩阵 } \Sigma=A+B \\
\text{差矩阵} \triangle=A-B
\end{cases}
\tag{3.4.1}
$$

并引入一种(合作的)TU解，它是以Σ与$\triangle$的对策值为基础而作出的。对于矩阵Σ，定义它的值σ为：

$$\sigma = \sigma(\Sigma) = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\max_{1\leqslant j\leqslant n}(a_{ij}+b_{ij}) \tag{3.4.2}$$

这里 Σ 代表局中人共同关心的利益，所以 σ 自然定义为其元素之最大者。而△表示局中人之间的竞争或抗衡。从△$=A-B$ 的定义，自然的，甲希望努力增大差$(a_{ij}-b_{ij})$，乙希望努力降低差$(a_{ij}-b_{ij})$，所以把△看作是一个零和对策的支付矩阵，故△的值 δ 应为：

$$\delta = v(\triangle) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-b_{ij})x_iy_j$$

$$= \max_{x\in X}\min_{y\in Y}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-b_{ij})x_iy_j \tag{3.4.3}$$

但实际上关于△的策略起的作用只是在局中人进行对策活动之前作预分析时使用，而非在实际中使用。可以设想此时局中人都分别提出一种恐吓策略 $x^*\in X$ 与 $y^*\in Y$，并可由此得出恐吓点 $T=(A(x^*,y^*),B(x^*,y^*))$。而 T 提供了一种对称的折衷基础：即两局中人可以就由于合作所得到的(超过 T 的)综合效益的公平分享而达到协议。可以期望这样的折衷：局中人甲、乙可就零和对策$(X,Y;\triangle)$来寻求各自的优策略 x^*,y^*，所以$(X,Y;\triangle)$是恐吓对策，而它们的最优策略也自然是最优恐吓策略。

如何计算这种折衷？若设 $\varphi=(\varphi_{甲}、\varphi_{乙})$为两人所得之折衷值，显然应有

$$\begin{cases}\varphi_{甲}+\varphi_{乙}=\sigma\\ \varphi_{甲}-\varphi_{乙}=\delta\end{cases} \tag{3.4.4}$$

前一式表明双方之和应等于其合作时之最大值，后一式表明双方共同分享超过 T 的值，称 φ 为 TU 值。显然

$$\varphi_{甲}=\frac{\sigma+\delta}{2},\qquad \varphi_{乙}=\frac{\sigma-\delta}{2} \tag{3.4.5}$$

现在仍回到原例，此时：

$$\Sigma=\begin{pmatrix}a+b & 600 & 0\\ 500 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\triangle=\begin{pmatrix}a-b & 600 & 0\\ -500 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

不难算出 $\sigma=600$，$\delta=0$，因而 $\varphi=(300,300)$。而双方的恐吓策略对应的所得是(0,0)。

例 1　讨论双矩阵对策 $\Gamma=(X,Y;A,B)$，其中

$$(A,B)=\begin{pmatrix}(8,3) & (-1,-1) & (6,4)\\ (2,4) & (7,4) & (5,4)\end{pmatrix}$$

解　显然

$$\Sigma=\begin{pmatrix}11 & -2 & 10\\ 6 & 11 & 9\end{pmatrix},\triangle=\begin{pmatrix}5 & 0 & 2\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

易知 T_1 为：(3.6,2.1)，或 T_2 为(4.875,3.375)，其中

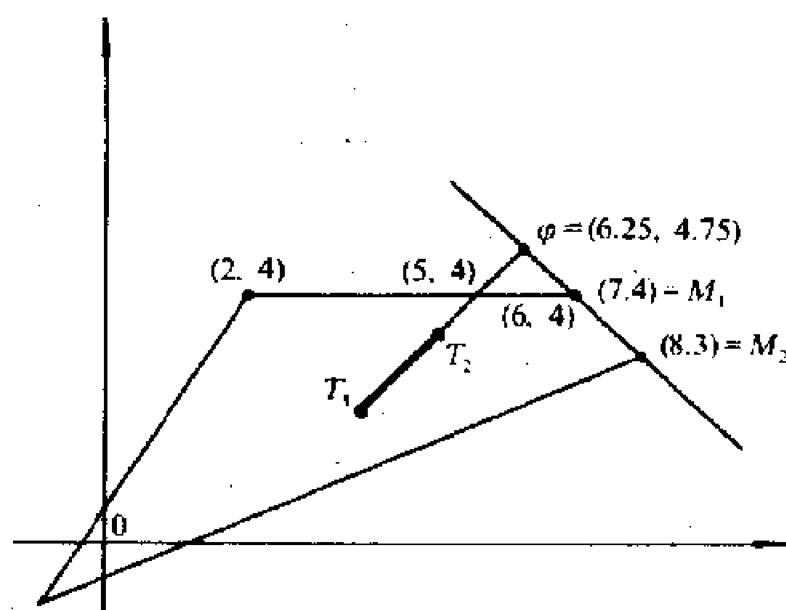


图 3.4.3

$x^*=(0.5,0.5)$，$y^*=(0.3,0.7,0)$或 $y^*=(0,0.25,0.75)$，由此计算出 $\sigma=11$，$\delta=1.5$ 以及 $\varphi=(6.25,4.75)$。

此例中有两个恐吓点 T_1、T_2. 事实上在图中线段$\overline{T_1T_2}$上的任何一点都是恐吓点，然而所有恐吓点都会推出相同的 TU 值。另外还有两个使双方合作时能取得最大收益的点 M_1，M_2，而事实上线段$\overline{M_1M_2}$上的任何一点都是没有旁支付时的可行点，也即 Pareto

集。而经过双方协商后乙的所得 $\varphi_2=4.75$，却又超过乙的支付矩阵 B 中任何一个元素的值。

说明 1 由上述理论，若 $\Gamma=\langle \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle$ 中 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}$，此时 Σ 为零矩阵，从而 $\sigma=0$，而 $\triangle=2A$，所以最优恐吓就是对策 $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};\boldsymbol{A})$ 中的优策略。此时 δ 为 $2v(A)$，而 TU 值 $\varphi=(v(A),-v(A))$，这时双方已无合作余地，只有对抗。

2 若 $B=A$，此时 $\Sigma=2A$，而 $\triangle$ 为零矩阵，这时 $\delta=0$ 而 σ 为 A 中最大元素的两倍，此时已无恐吓策略可言，并且没有什么理由给予旁支付，所以对于每个局中人而言其 TU 解只是此矩阵中的最大元素。

下面再讨论没有旁支付的情形。这里我们禁止在局中人之间进行在对策规则之外的支付，局中人之间可以进行谈判、互相恐吓或讹诈，签订契约或合同，这都依他们的纯策略以及相关的混合策略而定。局中人之间不得以任何方式转移货币、商品、服务等等，这些都是讨论问题的前提与假定。

先给出对策 $\langle \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle$ 的 NTU 可行域的含义，它是指出现在 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 中所有支付向量 (a_{ij},b_{ij}) 构成的集的凸包，也即在 R^2 中包含所有点 (a_{ij},b_{ij}) 的最小凸多边形。显然这是局中人在使用相关的混合策略时所可能接受的支付集。

例 2 考虑对策 $\Gamma=\langle \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle$，其中 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 为：

$$\begin{pmatrix} (4,6) & (1,1) \\ (0,2) & (6,4) \end{pmatrix}$$

易见当甲、乙分别采用策略 $(1/2,1/2)$ 时所得的合作时的支付为 $(5,5)$，而以双矩阵的四个元素组为顶点而构成的四边形便是 NTU 可行域。

当效益不能自由的转移时，不妨假设在局中人之间效益不仅不能转移，而且不可比较。可以设想局中人对风险持中庸态度，也即恰如其分的评价效益。但局中人分别生活在不同的、有相当距离

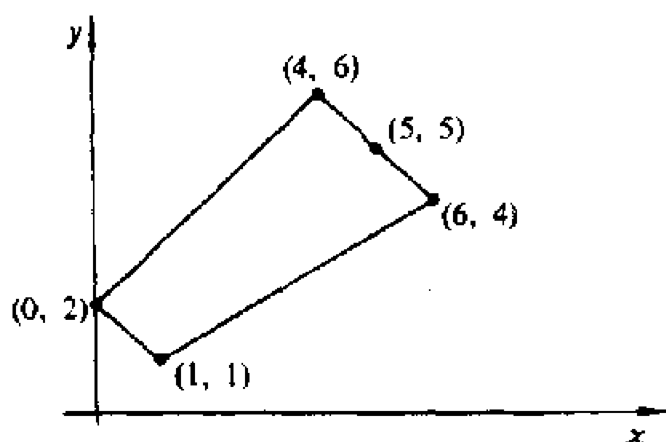


图 3.4.4

的地域内，以致于没有一种使之直接作货币转换的机构或没有一种交换的汇率。NTU 理论的关键概念是利用对策本身的数据以引导出一种交换比例。我们可以这样来解决此问题，即先给出一种假定的交换比例，局中人可以协商并象先前在 TU 对策中那样按所给的比例进行自由交换他们间的通货。一旦当他们在最后处理所得的结果——即前面讨论的 TU 值，他们可以"按规定"计算所需的旁支付，这看起来似乎违反了不得给予旁支付的规则。但是 NTU 理论的确切任务就是设法选取一种交换率，以便使得在终局时局中人发现所期望的 TU 结局是一种"零"旁支付，从而它总是合法的。易见按此种思路推导出来的交换比例类似于在经济中关于多种货物的供需均衡中的竞争平衡价格。

§5 λ—变换方法

在双矩阵对策 $\Gamma=\langle X,Y;A,B\rangle$ 中，若把 A 和 $-B$ 分别看作是矩阵对策中的支付矩阵，并且假设它们都在矩阵的相同位置处有鞍点，此时显然可把各自的鞍点看作是恐吓点，这时称双矩阵对策

Γ 为具有固定恐吓的对策，更确切地说是在纯策略中具有固定恐吓策略的对策。此时引入如下的辅助矩阵 $\lambda A-B$，其中 $\lambda>0$ 为实数，显然以 $\lambda A-B$ 为支付矩阵的零和对策的鞍点的位置与 A 的鞍点位置相同。

为了说明想要阐述的问题，不妨看一个例子。设讨论如下的谈判对策，其中(A,B)如下：

$$\begin{bmatrix}(6,3) & (0,0) & (0,0) & (0,0)\\ (0,0) & (4,6) & (0,0) & (0,0)\\ (0,0) & (0,0) & (1,8) & (0,0)\\ (0,0) & (0,0) & (0,0) & (0,0)\end{bmatrix}$$

在此例中局中人实际上有三种可能的选择，因若双方都选第四个纯策略，势必什么也得不到。然而此双矩阵中最下端和最右端处的元素确实同时是 A 与 B 的鞍点，所以它是一个具固定恐吓点的对策。

利用上节的方法计算 TU 值，可得 $\sigma=10,\delta=0,\varphi=(5,5)$。假如没有旁支付便能达到此 φ 值，我们当然可把它作为前述的 NTU 值，这是因为不允许旁支付也会使之成为可行。然而在没有旁支付的情况下也不会达到(5,5)。事实上如果我们画出由诸元素为顶点的多角形域(图 3.5.1(a)，其中 $\lambda=1$)，$\varphi=(5,5)$在所围的多角域之外。因此要由多角域的 Pareto 点集中顶点 $M=(4,6)$出发得到(5,5)，乙就要转移给甲一个单位的效益，但若调整度量单位，例如固定乙的效益单位不变(即以乙的效益为标准)，将甲的效益乘以正数入而得到双矩阵对策 $\Gamma=\langle X,Y;\lambda A,B\rangle$，并把它称为对策$\langle X,Y;A,B\rangle$的 λ 一变换扩张。易于看到它的 TU 解是入的函数，因为此时有：

$$\sum(\lambda)=\begin{bmatrix}6\lambda+3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4\lambda+6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\triangle(\lambda)=\begin{bmatrix}6\lambda-3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4\lambda-6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

易知 $\lambda=2$ 时可算出 $\sigma(2)=15,\delta(2)=0$，故 $\langle \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};2\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle$ 的 TU 值为(7.5,7.5)，自然会问它是 NTU 可行吗？回答此问题前应注意原先的支付单位——这意味着应将甲的支付用 λ 除之，由此给出 $\langle \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle$ 的 λ—转移值(λ—transfer value 的一般定义如下：

$$\varphi_{甲}(\lambda)=\frac{\sigma(\lambda)+\delta(\lambda)}{2\lambda},\varphi_{乙}(\lambda)=\frac{\sigma(\lambda)-\delta(\lambda)}{2}\quad(3.5.1)$$

故按(3.5.1)，此时 $\varphi(2)=(3.75,7.5)$，图 3.5.1(b)表明依此定义 $\varphi(2)$ 不是 NTU 可行。事实上因此时需要数额甚大的旁支付，而这实际上是经由点(6,3)出发到达点(3.75,7.5)，从而甲要付出 2.25 单位的甲方效益(例如货币)，而转换为乙方的"货币"为 4.50 单位，并将此交给乙方。但 $3.75+7.5\neq6+3$.

当 $\lambda=1/2$，经计算得 $\sigma(1/2)=8.5,\delta(1/2)=0,\varphi(1/2)=(8.50,4.25)$，然而这也需要甚大的旁支付，故也不是所需要的，所以对于 $\lambda>2$、及 $\lambda<1/2$ 均可不加以考虑。故可限于 $1/2<\lambda<2$. 此时对应于多角形域中 NTU—可行集的边 $\overline{PQ}$ 及 $\overline{QR}$，每条边的斜率的绝对值都必然被视为可能的交换比例。对局中人进行考察，可见在某种意义下依这些比例给予旁支付是可能的。因为他们可在问题所给图中的边的端点处进行选择。例如，对纯策略对 (α_1,β_1) 及 (α_2,β_2) 依概率组合，可产生边 $\overline{QR}$ 中的点，从而可使我们取 λ 作为这些特殊的交换比例。

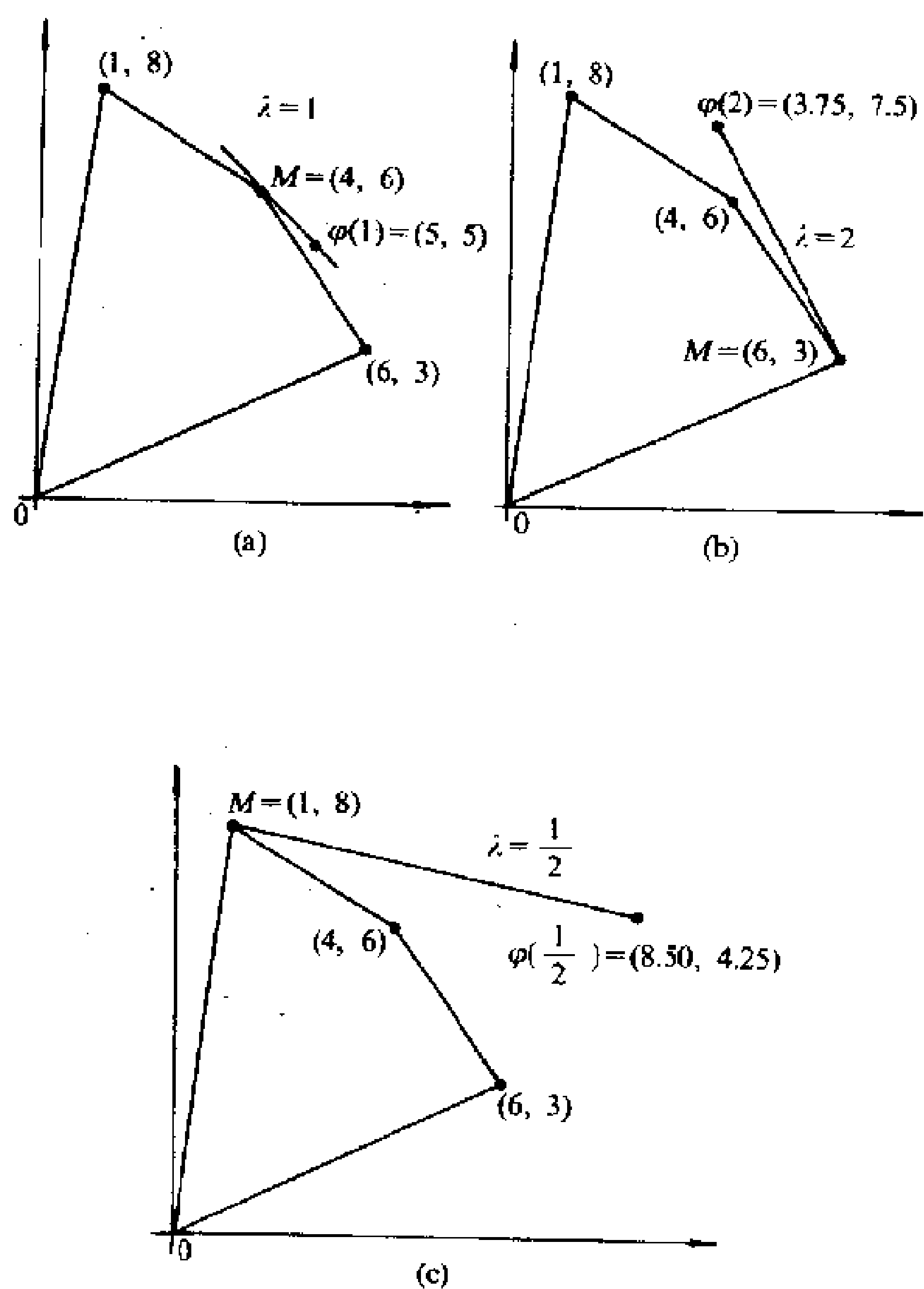


图 3.5.1

先考察$\overline{PQ}$边，其斜率为$-2/3$，故取 $\lambda=2/3$，并依前计算出

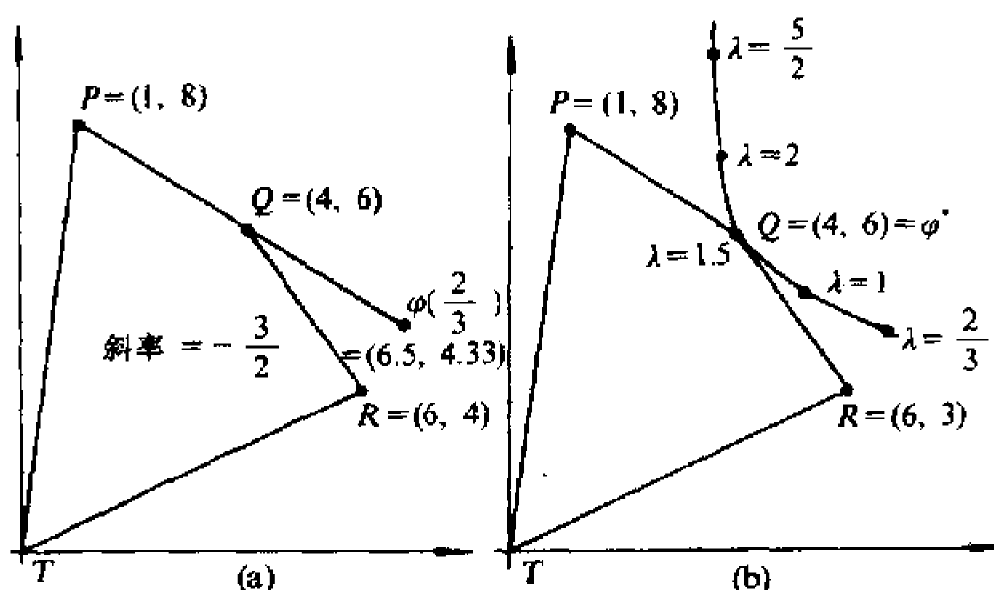


图 3.5.2

$\sigma(2/3)=26/3, \delta(2/3)=0, \varphi(2/3)=(13/2,13/3)=(6.5,4.33)$。此时仍然是失败的。实际上在边$\overline{PQ}$上的点都不是 NTU 可行。类似地可考察$\overline{QR}$，此时 $\lambda=3/2$，可得 $\sigma(3/2)=12, \delta(3/2)=0, \varphi(3/2)=(4,6)$. 这是一个不需要旁支付的交换率。从而得出本例的 NTU 解，即 NTU 值：$\varphi^*=(4,6)$；平衡交换率(equilibrium exchange rate)：$\lambda^*=3/2$；最优恐吓策略：$x^*=(0,0,0,1), y^*=(0,0,0,1)$；合作策略：$(\alpha_2,\beta_2)$。

图 3.5.2(b)描出了当 λ 由 1/2 到 5/2 时所对应的 $\varphi(\lambda)$的曲线，并且由 T 到 $\varphi(\lambda)$的斜率总是等于 λ.

当平衡交换率 λ^* 不是多角形的各条边的斜率的绝对值时，有何情形？

例　考虑双矩阵对策，其中$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$为：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}(1,0) & (-1,1) & (0,0)\\ (3,3) & (-2,9) & (2,7)\end{pmatrix}$$

解　在此例中，固定恐吓点 T 为 $(-1,1)$。现考察 $\overline{PQ}$ 边，此时 $\lambda=\frac{1}{2}$，作

$$\Sigma\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 9/2 & 8 & 0\end{pmatrix},\triangle(1/2)=\begin{pmatrix}1/2 & -3/2 & 0\\ -3/2 & -10, & -6\end{pmatrix}$$

易知 $\sigma(1/2)=8,\delta(1/2)=-3/2,\varphi(1/2)=(6.5,4.75)$。而关于边 $\overline{QR}$，易知 $\lambda=4$，此时

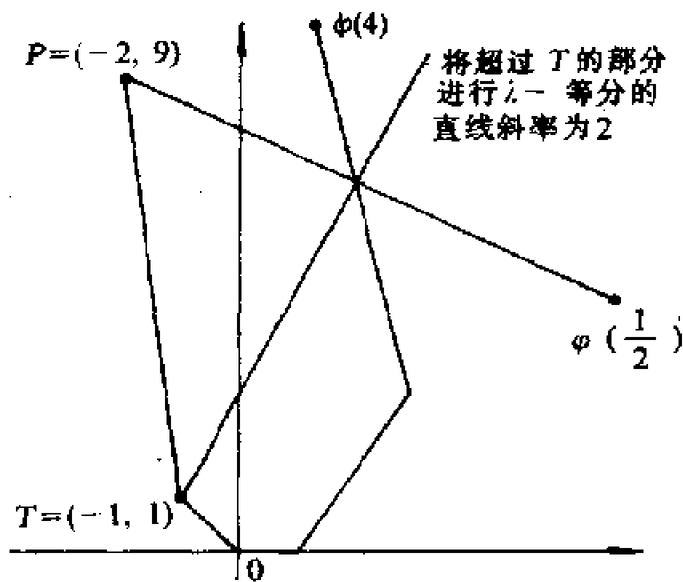


图 3.5.3

$$\Sigma(4)=\begin{pmatrix}4 & -3 & 0\\ 15 & 1 & 15\end{pmatrix},\triangle(4)=\begin{pmatrix}4 & -5 & 0\\ 9 & -17 & 1\end{pmatrix}$$

易知 $\sigma(4)=15,\delta(4)=-5,\varphi(4)=(5/4,10)$，依 $\lambda=1/2$，沿边 $\overline{PQ}$ 将使乙付给甲大数额的 λ 一转换旁支付，但若取 $\lambda=4$，沿边 $\overline{QR}$ 同样将使甲付给乙一个大数额的旁支付，这就推论出 φ^{*} 恰在顶点 Q 处，那么 $\lambda^{*}=?$ 当然可猜想 $1/2<\lambda^{*}<4$. 但如何求出？我们可采取沿线段 $\overline{TQ}$ 的方法，原因是在 TU 对策 $\langle \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};\lambda^{*}\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle$ 中，局中人应等分超过恐吓点 T 的那部分超过值。在 NTU 对策中原来的效益

单位中，他们间“相等的”分配应是应用了平衡交换率 λ^* 之后，所以由 T 到 φ^* 的直线必须具有斜率 λ^*，但我们知道 $\varphi^*=Q$ 而 $\lambda^*=2$，此即域内的边 $\overline{TQ}$ 的斜率。

可以看到关于 NTU 解的原则是：“转换的交换比例等于分配的交换比例。”

由上面两例可见在任何具固定恐吓点 T 的双矩阵对策中，平衡交换率 λ^* 或由 NTU 可行集的右上方边界的一个边的斜率给出，或由自 T 出发到右上方边界上某个顶点的直线——此直线位于由诸顶点围成的多角形域的内部——的斜率。换言之，这里仅有有限个值可能成为 λ^*，而且这两个斜率的系列或者是单调增加或者单调减少，主要由我们沿上方边界移动时而定。而当此两系列交叉之时，设法把 λ^* 挑选出来。

关于解具固定恐吓点的 NTU 对策，其确切方法步骤可总结如下：

1、确定出固定恐吓点 $T=(v(A),-v(B))\in R^2$ 的位置，过 T 作出横轴与纵轴，过 T 画出个体合理域，并记作 IR.

2、给出 NTU 可行集的 Pareto 边界（或有效边界），并用 PO^+ 记它与 IR 的交集。设 $\{V\}$ 为 PO^+ 的顶点集，$\{E\}$ 为其边集。若使用 PO^+ 失败，可再扩展于 IR 的水平与垂直边界，如果需要可在 $\{E\}$ 中补充（人工的）垂直或水平边。

3. 确定由 T 到诸顶点 V 的直线的斜率之值，沿 PO^+ 依时针方向运动，这些 V—斜率构成一个严格的减小数列。

4. 确定诸边 E 的斜率的绝对值，如沿 PO^+ 依时针方向运动，诸 E—斜率构成一个严格的增加数列。

5.（a）若有一个 V—斜率位于两个相继的 E—斜率之间，则 λ^* 为此 V—斜率，且 φ^* 可在顶点 V 处求得。（b）若有一个 E—斜率位于两相继 v—斜率之间，则 λ^* 为此 E—斜率，且 φ^* 可由 E 与自 T 出发而有斜率 λ^* 的射线的交点处求得。此交点可由解 TU 对策

$\langle X,Y;\lambda^* A,B\rangle$或由解析几何的方法求得。

注意由于减序列与增序列必然是交叉的，所以必会使用5(a)或5(b)两情况之一。若两情况同时成立，则此问题中的E—斜率与V—斜率必相等，且有相同的解。

以上是固定恐吓点的情形。下面讨论一般情况，这里T不再假设是固定的，而所给出的定义与可变对策$\triangle(\lambda)$的解有关。不过几何方法对于T为不固定时也是部分有效，事实上稍加处理，通过平衡交换比例λ^*，往往可解出NTU值φ^*，下面仍通过例子说明。

例　考虑$\Gamma=\langle X,Y;A,B\rangle$，其中$(A,B)$为

$$\begin{pmatrix} (1,3) & (2,2) \\ (3,-1) & (1,0) \end{pmatrix}$$

与通常一样仍由一系列NTU可行集开始。注意在集的右上方边界的斜率，若不知T的位置，便不能立即说出在那个边或那个点能找到解，所以还需要搜索过程。由于没有一个直接的方法确定哪个顶点是否所需要的解所在之处，故先将注意力集中于边。

现由边$\overline{PQ}$开始，由于它的斜率为-1，令$\lambda=1$，可得出

$$\sum(1)=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\triangle(1)=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

由此可得$\sigma(1)=4,\delta(1)=1,\varphi(1)=(5/2,3/2)$，不幸它不是NTU可行。这是因为它需要由乙向甲给予支付。故应试另一条边$\overline{QR}$，它的斜率为-3。令$\lambda=3$，可得：

$$\Sigma(3)=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 3 \end{pmatrix},\triangle(3)=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 10 & 3 \end{pmatrix},$$

由此得$\sigma(3)=8,\delta(3)=40/11,\varphi(3)=(64/11,24/11)$，但它也不是NTU可行。因此时是由甲向乙付以支付。从而可推想平衡的λ^*必位于此两边的(绝对的)斜率之间，这意味着NTU值φ^*位于Q，

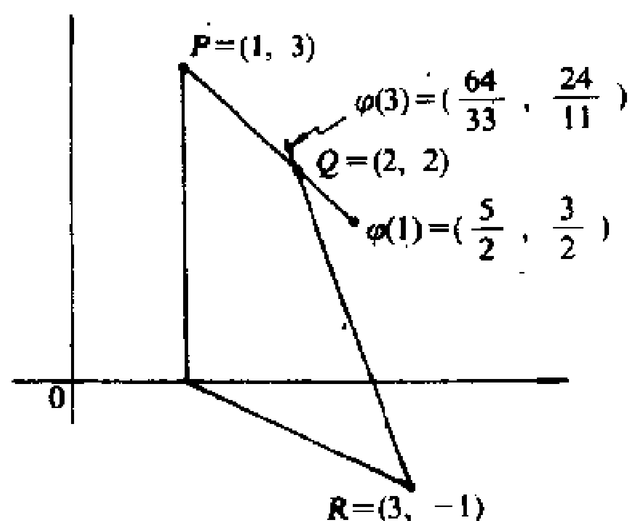


图 3.5.4

此时 $\varphi^*=(2,2)$，而 $1<\lambda^*<3$，当然，若没有 λ^*，是无法谈及最优恐吓的。

当 φ^* 在一个顶点时应如何求出确切的 λ^* 一般说来比较困难，因为它需要解一个高次多项式，但用近似方法却并不困难。我们可在 $1<\lambda^*<3$ 中进行划分而取其中一个值 λ，并解 TU 对策 $\langle \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};\lambda\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\rangle$，注意旁支付的"方向"(即由谁付给谁?)，每次把所试之区间折半，实际上当矩阵的元素之值是较小的整数时，也许只要有限的几次迭代便能求出 λ^* 之值。

例　考虑对策，此时设 (A,B) 为

$$\begin{pmatrix} (8,0) & (2,5) & (5,6) \\ (4,1) & (0,8) & (7,4) \end{pmatrix}$$

现将其 NTU 一可行域画在图 4.5.5 中，依规则可由域的右上方边界的中间边开始，即取 $\overline{QR}$，此时置 $\lambda=1$，可得：

$$\Sigma(1)=\begin{pmatrix} 8 & 7 & 11 \\ 5 & 8 & 11 \end{pmatrix},\triangle(1)=\begin{pmatrix} 8 & -3 & -1 \\ 3 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

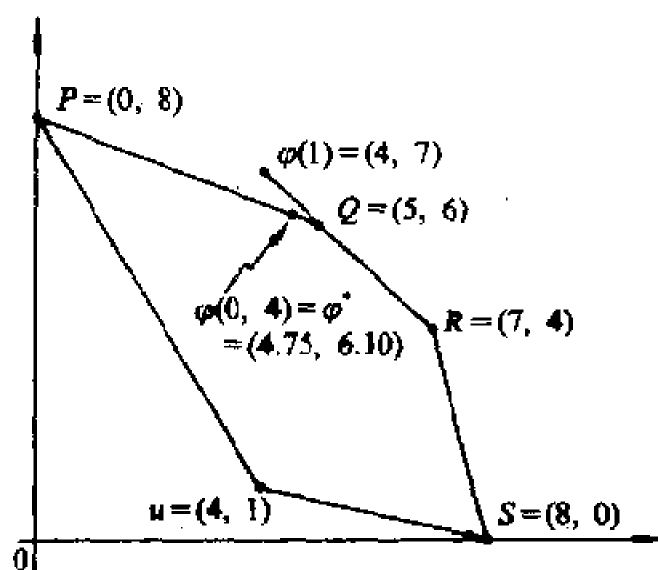


图 3.5.5

可算出 $\sigma=11$，$\delta=-3$，$\varphi=(4,7)$，它需要甲向乙付出旁支付。故转到另一条边$\overline{PQ}$，此时应取 $\lambda=0.4$，并得到

$$\Sigma(0.4)=\begin{pmatrix}3.2 & 5.8 & 8\\ 2.6 & 8 & 6.8\end{pmatrix},\triangle(0.4)=\begin{pmatrix}3.2 & -4.2 & -4\\ 0.6 & -8 & -1.2\end{pmatrix}$$

可求得 $\sigma=8$，$\delta=-4.2$，$\varphi(0.4)=(4.75,6,10)$。此点恰在$\overline{PQ}$上，故在 NTU 可行域上，不需要旁支付。从而 $\lambda^*=0.4$，$\varphi^*=(4.75,6,10)$，且 $x^*=(1,0)$，$y^*=(0,1,0)$，而合作策略却是 $x=(0.95,0.05)$，$y=(0,0.05,0.95)$。

关于双矩阵对策还有许多其他课题，我们将于其他有关章节中从其他角度予以介绍。

参考文献

[1] Guillermo Owen. Game Theory (2nd ed). Academic Press, 1982

[2] Jones A J. Game Theory Mathematical Medels of conflict. Ellis Horwood Limited and John Wiley sons, 1980

[3] Rosenmuller J. The Theory of Games and Markets. Amsterdam: North—Holland, 1981

[4] Vorob'ev N N. Game Theory, lectures for Economists and Systems Scientists. Springer—New York, Verlag, 1977

[5] Lemke C E, Howson J T. Equilibrium points of bimatrix games.

[6] Shapley L S. Game Theory. UCLA. Dept of Math, 1984

[7] Nash J. Equilibrium points in finite games. Proc Nat. Acad. Sci, USA36, 1950. 48—49

[8] Nash J. Noncooperative games. Ann of Math, 1951(54): 286—295

[9] Harsanyi J C. Selten R. A generalized Nash—solution for two—person bargaining games with in complete information. Management Science (18), 1971/1992

第四章　二人零和无限对策

§1　引　言

前几章讨论的对策中局中人的策略集是有限集，虽然这类策略的个数可能数量庞大，但却是有限的。会不会出现局中人的（纯）策略集是无限的？这引导我们去研究无限对策（Infinife game）。这类对策有重要实际背景，一些军事问题或经济问题的数学模型就可能涉及无限对策。如在制订作战方案时，关于攻击时刻很可能选自某一时间段（$0\leqslant t\leqslant b$）内的某个时刻，然而从理论上讲，此时间段中任一时刻都可作为被选择的对象。若每一时刻对应于一个攻击"策略"，那么这实际上有无限多个策略，它们密布在整个时间段。若记此时间段的区间为$[a,b]$，从数学上看就是选取$t\in[a,b]$为所需策略，因t是连续分布在$[a,b]$上，故也称此类对策为连续对策（Continuous games），下面给出此类对策的数学描述。

为简单计，设连续对策中甲自他的策略集$\mathscr{X}$中选取一个策略$x,x\in\mathscr{X}$，同时乙自其策略$\mathscr{Y}$中选取策略集$y,y\in\mathscr{Y}$，这便确定此时策的一个局势，其结果（效益）可用支付加以描述。在零和情况下设甲所得支付为$M(x,y)$，则乙的所得为$-M(x,y)$，此时对策记作$\Gamma=(\mathscr{X},\mathscr{Y},M)$，在本章中如无特别声明，所论对策均为零和对策。$M$通常称为对策$\Gamma$的核（Kernel）。与前几章一样，局中

人甲期望能获得$\sup\limits_{x\in\mathscr{X}}\inf\limits_{y\in\mathscr{Y}}M(x,y)$，而乙却希望甲最多只能得到$\inf\limits_{y\in\mathscr{Y}}\sup\limits_{x\in\mathscr{X}}M(x,y)$，并且不难推出(以下将$\sup\limits_{X\in\mathscr{X}}$简记为$\sup\limits_{x}$，余类推)：

$$\sup_{x}\inf_{y}M(x,y) \leqslant \inf_{y}\sup_{x}M(x,y) \qquad (4.1.1)$$

显然若上式中等号成立，即存在点(x_0,y_0)使

$$\sup_{x}\inf_{y}M(x,y) = \inf_{y}\sup_{x}M(x,y) = M(x_0,y_0) \quad (4.1.2)$$

则称 $M(x,y)$具有一个鞍点(x_0,y_0)，又因为策略 x_0 及 y_0 应满足条件：

$$\begin{cases} M(x_0,y) \geqslant M(x_0,y_0), & \text{对一切 } y \\ M(x,y_0) \leqslant M(x_0,y_0), & \text{对一切 } x \end{cases} \qquad (4.1.3)$$

它们分别称为甲、乙的优策略。显然若连续对策有鞍点，此鞍点必给出甲、乙两局中人的优策略。通常，为简单计，设 $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ 为[0,1]。

若(4.1.1)中等式不成立，此时对策没有鞍点，我们应该怎么办？这时自然会仿照有限对策而引入"混合策略"，即在甲、乙的策略集上分别引入概率分布函数。当然这里不可能象有限对策那样对闭区间[0,1]中的每一点赋予一个概率，而应该用另外的定义。当然新的定义也应该能适用于有限对策。

直观的想，无限对策的混合策略可看作由[0,1]中选取数 x 的随机过程，然而也可以把它看作在[0,1]中选取的数不超过 x 的随机过程。若 ξ 为一随机变量且使得 $0\leqslant\xi\leqslant1$，从而混合策略便是如下一个函数 F，使对于任何 $x\in[0,1]$，定义：

$$F(x) = pr\{\xi \leqslant x\} \qquad (4.1.4)$$

这里 $pr\{\cdot\}$即"$\cdot$"的概率，$F(x)$是依随机过程 F 选取之数最大为 x 的概率。为数学讨论方便，对于 $x=0$ 略去不计而定义 $F(0)=0$。于是对于 $0<x_1<x_2\leqslant1$，可推出

$$F(x_2) - F(x_1) = Pr\{x_1 < \xi \leqslant x_2\}$$

以及

$$F(x_2) - F(0) = Pr\{0 \leqslant \xi \leqslant x_2\}$$

函数 F 称为累积分布函数,(Cumulative distribution funcfion)简称分布函数,显然 F 具有以下性质:i)$F(x) \geqslant 0$,对一切 $0 \leqslant x \leqslant 1$;ii)$F(0)=0, F(1)=1$;iii)$F$ 为 x 的不减函数,即当 $x_1 \leqslant x_2$ 时 $F_{(x_1)} \leqslant F_{(x_2)}$;iv)$F$ 为在开区间(0,1)中的右端连续函数,或 $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} F(x+\varepsilon) = F(x)$。性质 iv)是由 $F(x+\varepsilon) - F(x) = Pr\{x < \xi < x+\varepsilon\}$ 推出的,其中 $\varepsilon > 0$ 为充分小。当然右端连续的函数可以是不连续的。

若 $F_1, F_2, \cdots\cdots, F_n$ 为 n 个分布函数,可用它们的任何线性凸组合的方式构造一个新的分布函数:

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \cdots + \alpha_n F_n(x)$$

这里 $\alpha_i \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

常用的一类分布函数是阶梯函数,若 $0 \leqslant a \leqslant 1$,定义

$$I_a(x) = \begin{cases} 0, & 若\ x < a \\ 1, & 若\ x \geqslant a \end{cases}$$

其中 $\alpha_i \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$,且 $0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_i \leqslant x_{i+1} \leqslant \cdots \leqslant 1$.

在以下的讨论中常使用 Stieltjes 积分,关于它的定义,性质等可参阅有关书籍不在此赘述。例如我们需要以下结果:若 $F(x)$ 为阶梯函数或 $F(x) = I_a(x)$,且设 $P(x)$ 在 a 处连续,则

$$\int_0^1 P(x) dI_a(x) = P(a) \qquad (4.1.5)$$

类似地,若 $F(x) = \alpha_1 I_{x_1}(x) + \cdots + \alpha_n I_{x_n}(x)$,其中 $\alpha_i \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, i = 1, \cdots, n$,且若 $P(x)$ 在诸 $x_i, i = 1, \cdots, n$ 处均连续,则

$$\int_0^1 P(x) dF(x) = \alpha_1 P(x_1) + \cdots + \alpha_n P(x_n) \qquad (4.1.6)$$

以上诸结果均不证明,其他用到的简单性质也不一一列出。

§2 无限对策解的存在问题

设所论零和无限对策 Γ 中，支付函数为 $M(x,y)$，再设甲使用分布函数 $F(x)$ 由[0,1]中选取策略 x，乙在[0,1]中任取策略 y，此时甲的期望效益如果存在的话，记作 $E(x,y)$，则

$$E(x,y)=\int_0^1 M(x,y)dF(x) \tag{4.2.1}$$

假如乙是按分布函数 $G(y)$ 由[0,1]中选取策略 y，若甲的期望支付存在，则有

$$E(F,G)=\int_0^1\int_0^1 M(x,y)dF(x)dG(y), \tag{4.2.2}$$

当然在支付存在的假设下，还有

$$E(F,G)=\int_0^1 E(F,y)dG(y)=\int_0^1 E(x,G)dF(x), \tag{4.2.3}$$

其中 $E(x,G)$ 的表达式读者自己不难写出。

与有限对策相似，自然会定义以下两个值

$$\begin{cases} v_1=\sup\limits_F \inf\limits_G E(F,G) \\ v_2=\inf\limits_G \sup\limits_F E(F,G) \end{cases} \tag{4.2.4}$$

一般言之，$v_1\leqslant v_2$. 自然会问何时有 $v_1=v_2$? 另外，Supinf 及 infsup 能否改换作 maxmin 及 minmax?若以上两个问题都能得到肯定的回答，则说此时存在最优混合策略，此时记 v_1 与 v_2 之共同值为 v，并称它为对策 $\Gamma=\langle\mathscr{X},\mathscr{Y},M\rangle$ 的值。此时若甲存在策略 F^*，使对一切 G，有 $E(F^*,G)\geqslant v$，称 F^* 为甲的优策略。类似地，若乙存在 G^*，使对一切 F，有 $E(F,G^*)\leqslant v$，称 G^* 为乙的优策略。但若仅有 v 存在而优策略不存在时，我们定义 ε 一优策略如下：对任给

之 $\varepsilon>0$，分别存在甲、乙的混合策略 F,G 使得：

$$\begin{cases} E(F,y) > v - \varepsilon, \forall\ y \in [0,1] \\ E(x,G) < v + \varepsilon, \forall\ x \in [0,1] \end{cases} \tag{4.2.5}$$

则称(F,G)为对策 Γ 的 ε 一优策略对。

现在回答上面的问题，如果对 M 不作限制，无限对策可能无解，然而若设 $M(x,y)$关于两个变量 x,y 为连续，可证优策略存在。

定理 4.2.1 若 $M(x,y)$为连续函数，则 supinf 及 infsup 可以分别被 maxmin 及 minmax 代替。

证 因 M 连续，故对甲的任何策略 F，函数

$$E(F,y) = \int_0^1 M(x,y)dF(x)$$

为 y 的连续函数，因$[0,1]$为紧，故 $E(F,y)$在此区间中必能达到极小值，即 supinf 可改作 supmin.

再由 v_1 的定义，对于任何 n，存在分布函数 F_n 使得$\min\limits_y E(F_n, y)>v-\dfrac{1}{n}$. 又因将$[0,1]$映射为其自身的所有函数构成之集在逐点收敛的拓朴中是紧的，所以序列$\{F_1,F_2\cdots\}$含有一收敛子列，并设此收敛子列的极限函数为 F_0，由于诸分布函数 F_n 满足 §1 中所列诸性质 i)——iii)，显然它们的极限函数 F_0 也具有 §1 中所列诸性质 i)——iii)。但另一方面 F_0 却不一定满足 $F_0(x)=F_0(x^+)$，$x\neq0$. 这是因为在此种取极限的过程中不能保证极限仍保持右端连续。虽然如此，可定义函数 $\overline{F}_0$ 如下：

$$\overline{F}_0 = \begin{cases} 0 & \text{若 } x = 0, \\ F_0(x^+), & \text{若 } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{若 } x = 1. \end{cases} \tag{4.2.6}$$

显然 $\overline{F}_0$ 是策略，F_0 与 $\overline{F}_0$ 的差异仅在于它们的间断点处，然而它们都是单调的，故其间断点为可数，故对一切 y 有

$$\int_0^1 M(x,y)d\overline{F}_0(x) = \int_0^1 M(x,y)dF_0(x)$$

又因 M 连续并从而为一致连续，故推知当 F_0 为子序列$\{F_m\}$的极限时有

$$\int_0^1 M(x,y)dF_0(x) = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 M(x,y)dF_n(x),$$

然而对任何 y，此极限产生之支付至少为 v_1，所以$\min\limits_y E(\overline{F}_0,y)\geqslant v_1$，而 $\overline{F}_0$ 恰给出所期望的极大值，也即此时可用 maxmin 代替 supmin，或 maxmin 可代替 supinf.

类似可证 infsup 能被 minmax 代替。证毕

定理 4.2.2 若 $M(x,y)$连续，则 $v_1=v_2$.

证 采用近似逼近方法，将$[0,1]\times[0,1]$划分为$u\times n$ 个小方块，各方块顶点为$(i/n,j/n)$，$i,j=1,\cdots,n$. 取 $M(x,y)$在诸顶点处的值 $M(i/n,j/n)\underline{\text{def}}a_{ij}^n$，由此构成$(n+1)\times(n+1)$矩阵 $M_n=(a_{ij}^n)_{(n+1)\times(n+1)}$，而以 M_n 为支付的对策 Γ_n 有值，设值为 w_n，并设甲、乙此时的优策略分别为 $r_n=(r_0^{(n)},\cdots,r_n^{(n)})$及 $S_n=(S_0^{(n)},\cdots,S_n^{(n)})$，但由于 M 连续，且正方形$[0,1]\times[0,1]$为紧集，故知 M 在其上为一致连续。于是对于任给之 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使当(x,y)与(x^1,y^1)两点间距离 $\sqrt{(X-x^1)^2+(y-y^1)^2}<\delta$ 时有 $|M(x,y)-M(x^1,y^1)|<\epsilon$，现取 n 充分大使$\dfrac{1}{n}<\delta$，并构造策略 F_n 如下。$F_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{[nx]}r_i^{(n)}I_{i/n}(x)$，这里$[nx]$表示 nx 的整数部分，类似地，对任何 y，设 $j=[ny]$，显然有：

$$E(F_n,j/n) = \sum_{i=0}^n a_{ij}^{(n)}r_i^{(n)} > w_n$$

并且由于$|y-(i/n)|<\delta$，于是$|M(x,y)-M(x,i/n)|<\epsilon$，从而有$|E(F_n,y)-E(F_n,i/n)|<\epsilon$，于是对任何 y，有 $E(F_n,y)>w_n-\epsilon$，这就推出

$$v_1 > w_n - \varepsilon$$

类似地可推得 $v_2 < w_n + \varepsilon$，由此可得

$$v_1 > v_2 - 2\varepsilon$$

但由于 $v_1 \leqslant v_2$，且 ε 为任意，于是有 $v_1 = v_2$. 证毕

综合以上两定理知当 M 为连续时 $\Gamma = \langle \mathscr{X}, \mathscr{Y}, M \rangle$ 有解。

由定理的证明可见 $v = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$，且当 $n \to \infty$ 时 F_n 逼近最优策略。因此我们可用以 M_n 为支付的矩阵对策来逼近连续对策$(\mathscr{X}, \mathscr{Y}, M)$，当核 M 相当光滑或变化起伏不大时，n 不需很大便能得到连续对策的很好近似，但如果核并不是"正则的"，要得到较好的近似便需甚大的 n，然而当 n 甚大时求解矩阵对策可能不会很快，能否采用解析方法求解此类对策便可能成为难题。

上面对 M 假设了较强的条件，减弱关于 M 的条件，证明便比较困难，请参看有关文献。

如果在 $\Gamma = (\mathscr{X}, \mathscr{Y}, M)$ 中(这里$(\mathscr{X} = \mathscr{Y} = [0,1])$，甲、乙的优策略对为$(F^*, G^*)$，对策值为 v，此时不难推出以下性质：

$$(1)\ \max_F E(F, G^*) = \min_G E(F^*, G);$$

$$(2)\ \max_x E(x, G^*) = \min_y E(F^*, y) = v;$$

反之若(1)或(2)成立，则 F^*, G^* 也是优策略，v 为对策值。若设 $H^*(x) = E(x, G^*)$，$K^*(y) = E(F^*, y)$，则有：

(3)$H^*(x) \leqslant v \leqslant K^*(y)$，$x \in [0,1]$，$y \in [0,1]$；

(4)若 $H^*(x_0) < v$，则 $Pr\{\xi = x_0\} = 0$，即局中人的最优混合策略中不含有使其效益小于对策值的策略，类似地，若 $K^*(y_0) > v$，则 $Pr\{\xi = y_0\} = 0$.

(5)若 $Pr\{\xi = x_0\} > 0$，则 $H^*(x_0) = v$.

以上这些性质与有限对策颇有相似之处，此处不予证明(留给读者)。

例 1　设在正方形$[0,1] \times [0,1]$上的无限对策，其支付为

$M(x,y)=(x-y)^2$，试讨论之。

解　可以验证若甲取 $x=0$ 及 $x=1$ 两个纯策略，并以等概率 1/2 将它们组合构成混合策略，而乙取纯策略 $y=1/2$，即设

$$F^*(x)=\frac{1}{2}I_0(x)+\frac{1}{2}I_1(x),\quad G^*(y)=I_{\frac{1}{2}}(y)$$

则 F^*，G^* 为优策略。事实上，由计算

$$\max_x\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}G^*(y)=\max_x M(x,\frac{1}{2})$$

$$=\max_x(x-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$$

$$\min_y\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F^*(x)=\min_y[\frac{1}{2}M(0,y)+\frac{1}{2}M(1,y)]$$

$$=\min_y[\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}(1-y)^2]=\frac{1}{4}$$

由于 $\max_x E(x,G^*)=\min_y E(F^*,y)=\frac{1}{4}$，故 F^*，G^* 为优策略，且 $v=\frac{1}{2}$。

例 2　设在正方形[0,1]×[0,1]上的无限对策的支付 $M(x,y)=|y-x|(1-|y-x|)$，试讨论之。

解　可以验证 $F^*(x)=x$，$G^*(y)=y$ 为对策的解。事实上此时有

$$H^*(x)=\int_0^1 M(x,y)dG^*(y)=\int_0^1|y-x|(1-|y-x|)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{y=0}^{x}(x-x^2+2xy-y-y^2)\mathrm{d}y$$

$$+\int_{y=x}^{y=1}(y-y^2+2xy-x-x^2)\mathrm{d}y=\frac{1}{6}$$

$$K^*(y)=\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F^*(x)=\int_0^1|y-x|(1-|y-x|)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}$$

由于对正方形中一切 x 及 y 均有 $H^*(x)=\frac{1}{6}=K^*(y)$，故 $F^*(x)=x$ 及 $G^*(y)=y$ 为优策略，且对策值 $v=\frac{1}{6}$.

前已指出无限对策可能无解，现举一例。

例 3　设在正方形[0,1]×[0,1]上的无限对策其支付函数为：

$$M(x,y)=\begin{cases}0, & 若\ x=y\\ -1, & 若\ x=1, y<1\ 且\ x<y<1\\ +1, & 若\ y=1, x<1\ 且\ y<x<1\end{cases}$$

试讨论之。

解　先计算甲的期望支付，设此时甲采用策略 F 而乙采用策略 y，此时 $E(F,y)=?$

(1)若 $0<y<1$，则

$$\begin{aligned}E(F,y)&=\int_{x=0}^{1}M(x,y)\mathrm{d}F\\&=-1\int_{0}^{y-0}\mathrm{d}F+1\int_{y+0}^{1-0}\mathrm{d}F-1\int_{1-0}^{1}\mathrm{d}F\\&=-F(y-0)+F(1-0)-F(y)-F(1)+F(1-0)\\&=-1+2F(1-0)-[F(y-0)+F(y)]\end{aligned}$$

(2)若 $y=0$，则

$$\begin{aligned}E(F,y)&=\int_{0^+}^{1-0}\mathrm{d}F-\int_{1-0}^{1}\mathrm{d}F=2F(1-0)-F(1)\\&=2F(1-0)-1\end{aligned}$$

(3)，若 $y=1$，则

$$E(F,y)=\int_{0}^{1-0}\mathrm{d}F=F(1-0)$$

由于 $F(y)\geqslant F(y-0)$，故若 $0<y<1$，由上计算可得

$$\begin{aligned}E(F,y)&\leqslant-1+2F(y-0)-2F(y-0)\\&=-1+2[F(1-0)-F(y-0)]\end{aligned}$$

所以对于任何 F 及任何 $\varepsilon(0<\varepsilon<\frac{1}{2})$，存在一个 y_0 使得 $E(F,y_0)\leqslant-1+\varepsilon$，换言之，对任何 F，存在 G：$G=I_{y_0}(y)$使得

$$E(F,G)\leqslant-1+\varepsilon$$

于是$\inf_{G}E(F,G)\leqslant-1+\varepsilon$，并由此推出

$$\sup_{F}\inf_{G}E(F,G)\leqslant-1+\varepsilon$$

类似可证对任何 G 及任何 $\varepsilon(0<\varepsilon<\frac{1}{2})$，存在 F 使得 $E(F,G)\geqslant+1-\varepsilon$，并由此推出

$$\inf_{G}\sup_{F}E(F,G)\geqslant1-\varepsilon$$

从而关于此对策有

$$\inf_{G}\sup_{F}E(F,G)>\sup_{F}\inf_{G}E(F,G)$$

即对策无解。

§ 3　凸对策与凹对策

许多应用对策方法的问题中其支付函数常为某个变量的凸函数，例如军事中的攻防问题等。这就是我们研究此类问题的背景。

关于凸函数的定义、性质读者谅已熟悉（否则请查阅有关教程）。在这里假设支付函数 $M(x,y)$对于每个给定的 x 而言都是 y 的严格凸函数，且设 M 关于 y 可微分两次，于是对任何分布函数 $F(x)$，可推知函数

$$K(y)=\int_0^1M(x,y)\mathrm{d}F(x)\qquad(4.3.1)$$

也是严格凸的，这是因为若$\frac{\partial^2M}{\partial y^2}>0$对一切 y 成立必能推出$\frac{\partial^2K}{\partial y^2}>0$ 对一切 y 也成立。

现在考察局中人的策略。在 $M(x,y)$ 关于每个 x 都是 y 的严格凸的假设下再设它关于两个变量都连续，依上节结论对策有解。现设 $F^*(x)$ 为甲的优策略，此时乙为了对抗 $F^*(x)$ 而选取某个 G^* 使得

$$\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G^*(y) = \min_G\int_0^1\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F^*(x)\mathrm{d}G(y)$$

$$= \min_y\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F^*(x) = \min_y K^*(y)^{①}$$

而 $K^*(y)$ 关于 y 是严格凸的，故可设 $K^*(y)$ 在某点取得极小值，于是推知乙有一个纯策略 y^*，即使 $K^*(y)$ 取极小的那一点，这是凸对策的特点。

下面再讨论对策值 v. 可证 $v=\min\limits_y \max\limits_x M(x,y)$，因为由 M 连续且关于 y 为严格凸的假设，可求出对策值 v，而由优策略的性质(2)，

$$v= \max_x\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}G^*(y)$$

$$= \min_G\max_x\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}G(y)$$

而乙的优策略为一个纯策略，故它是一个具一个阶跃的分布函数 $I_y(y)$，所以

$$v = \min_y \max_x\int_0^1 M(x,y)dI_y(y) = \min_y \max_x M(x,y).$$

当乙的优策略为 y^* 时必有：

$$v = \min_y \max_x M(x,y) = \max_x M(x,y^*) \qquad (4.3.3)$$

所以 y^* 具有使 $\max\limits_x M(x,y)$ 取极小的特性，而由于 $M(x,y)$ 的严格凸性，故必 y^* 为唯一。

---

① 这里应用了 § 2 的优策略的性质(2)。

现再分析甲的优策略。由于乙的优策略 y^* 为纯策略，故可分作 $y^*=0$，$0<y^*<1$ 及 $y^*=1$ 三种情况，现分别讨论之。

设 $y^*=0$，此时$\max\limits_x M(x,0)=v$，于是对一切 x，有 $M(x,0)\leqslant v$，再设

$$X_0=\{x_0\in[0,1]|M(x_0,0)=v\} \tag{4.3.4}$$

并设 $X_1=[0,1]-X_0$，且记 X_1 中元素为 x_1，则对一切 $x_1\in X_1$，必 $M(x,0)<v$，由于甲的优策略中必是由 X_0 中的诸策略 x_0 混合而成，可证甲实际上存在一个最优纯策略，即存在某个 x_0 使对一切 y 都有 $M(x_0,y)\geqslant v$，这等价于证明存在 $x_0\in X_0$ 使 $v=\min\limits_y M(x_0,y)=M(x_0,0)$，也即证明了 $M(x_0,y)$在 $y=0$ 处是不减的。若上述断言不成立，则对每个 $x_0\in X_0$ 函数 $M(x_0,y)$在 $y=0$ 处是减少的，或$\dfrac{\partial M(x_0,0)}{\partial y}=M'_y(x_0,0)<0$，则对于充分小的 $\delta_1>0$ 及每个 $x_0\in X_0$，当 $0<y<\delta_1$ 时，必有 $M(x_0,y)<v$，又由于 $M(x_1,y)$关于 y 为连续，故对充分小的 $\delta_2>0$ 及每个 $x_1\in X_1$，当 $0<y<\delta_2$ 时必有 $M(x_1,y)<v$，这样一来存在一个 y_1 满足 $0<y_1<\min(\delta_1,\delta_2)\overset{\text{def}}{=\!=}\delta$，使对于 $x\in[0,1]$，有 $M(x,y_1)<v$，从而推出$\max\limits_x M(x,y_1)<v$，$0<y_1<\delta$，由此得到矛盾：

$$v=\min_y\max_x M(x,y)\leqslant\max_x M(x,y_1)<v,$$

因此必有 $x_0\in X_0$ 使 $M(x_0,y)$在 $y=0$ 处为不减，又因 $M(x_0,0)=v$ 及 $M(x_0,y)$的凸性，可推出 $v=\min\limits_y M(x_0,y)$，或对一切 y 有 $M(x_0,y)\geqslant v$ 成立。

类似地可分析 $y^*=1$ 时的情形。此时甲也有一个最优纯策略 x^* 使 $M(x^*,1)=v$ 及 $M'(x^*,1)\leqslant 0$.

再讨论 $0<y^*<1$ 的情形。由于 y^* 为优策略，故对一切 $x\in[0,1]$有 $M(x,y^*)\leqslant v$，作集合

$$X_0=\{x_0\in[0,1]|M(x_0,y^*)=v\} \tag{4.3.5}$$

并令 $X_1=[0,1]-X_0$，仿 $y^*=0$ 的情形可证存在某个 $x_0^*\in X_0$ 使得：

$$M(x_0^*,y^*)=v,\text{且}\ M'_y(x_0^*,y^*)\geqslant 0 \tag{4.3.6}$$

然而还可仿 $y^*=1$ 的情形（这部分略去，读者可自行推证），证明存在某个 $x_{00}^*\in X_0$ 而使得

$$M(x_{00}^*,y^*)=v, M'_y(x_{00}^*,y^*)\leqslant v \tag{4.3.7}$$

现再作函数：

$$f(\lambda)=\lambda M'_y(x_0^*,y^*)+(1-\lambda)M'_y(x_{00}^*,y^*) \tag{4.3.8}$$

显然 $f(0)\leqslant 0, f(1)\geqslant 0$，因 f 为 λ 的连续函数，故在 $[0,1]$ 中必存在一点 α 而使得

$$f(\alpha)=\alpha M'_y(x_0^*,y^*)+(1-\alpha)M'_y(x_{00}^*,y^*)=0$$

在确定出 x_0^*,x_{00}^*,α 之后可证甲的一个优策略为：

$$F^*(x)=\alpha I_{x_0^*}(x)+(1-\alpha)I_{x_{00}^*}(x) \tag{4.3.9}$$

事实上由 F^* 可得

$$K^*(y)=\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F^*(x)=\alpha M(x_0^*,y)+(1-\alpha)M(x_{00}^*,y)$$

由于 $M(x,y)$ 关于 y 为凸，故 $K^*(y)$ 关于 y 也是凸的，并且

$$\frac{\mathrm{d}K^*(y)}{\mathrm{d}y}=\alpha M'_y(x_0^*,y)+(1-\alpha)M'_y(x_{00}^*,y)$$

在 y^* 处取值为零，故 $K^*(y)$ 在 y^* 处取极小，也即：

$$\min_y K^*(y)=\alpha M(x_0^*,y^*)+(1-\alpha)M((x_{00}^*,y^*)=v.$$

于是推出 $F^*(x)$ 为甲的一个优策略。

总之，甲的优策略当 $0<y^*<1$ 时为阶梯函数：

$$F^*(x)=\alpha I_{x_1}(x)+(1-\alpha)I_{x_2}(x) \tag{4.3.10}$$

其中 x_1,x_2,α 满足：

$$\begin{cases}M(x_1,y^*)=M(x_2,y^*)=v,\\ M'_y(x_1,y^*)\geqslant 0\geqslant M'_y(x_2,y^*),\\ \alpha M'_y(x_1,y^*)+(1-\alpha)M'_y(x_2,y^*)=0\end{cases} \tag{4.3.11}$$

下面再讨论凹对策。此时设支付函数 $M(x,y)$关于两个变量均为连续，并且对于每个 y，M 为 x 的严格凹函数，再设$\frac{\partial M(x_1,y)}{\partial x}$在正方形$[0,1]\times[0,1]$中处处存在。与前面讨论相仿，此类对策 $\Gamma=(\mathscr{X},\mathscr{Y},M)$的解如下：

(1) $v=\max\limits_{x}\min\limits_{y}M(x,y)$.

(2) 甲有一个唯一的最优纯策略x^*.

(3) 若 $x^*=0$，乙有一个最优纯策略 y_*，它满足：$M(0,y^*)=v$，且$\frac{\partial M(0,y^*)}{\partial x}=M'_x(0,y^*)\leqslant 0$；若 $x^*=1$，乙同样有一个最优纯策略 y^* 使 $M(1,y^*)=v$，且 $M'_x(1,y^*)\geqslant 0$；而若 $0<x^*<1$，则乙的最优（混合）策略为阶梯函数 $G^*(y)=\alpha I_{y_1}(y)+(1-\alpha)I_{y_2}(y)$，其中 y_1、y_2、α 满足条件：

$$\begin{cases}M(x^*,y_1)=M(x^*,y_2)=v,\\ M'_x(x^*,y_1)\leqslant 0\leqslant M'_x(x^*,y_2),\\ \alpha M'_x(x^*,y_1)+(1-\alpha)M'_x(x^*,y_2)=0\end{cases}\qquad(4.3.12)$$

在上面讨论的对策中，均假设支付是严格凸或严格凹。然而在许多问题中“严格”二字可能不被满足，尽管如此，绝大多数结论当放松此严格假设时仍成立，然而优策略的唯一性却可能不成立。

上面讨论中均假设甲、乙的策略空间均是一维的。然而当局中人的策略空间为 n 维时也可仿上讨论。

例 1　设 $\Gamma=\langle\mathscr{X},\mathscr{Y};M\rangle$中支付函数为 $M(x,y)=(x-y)^2$，试求其解。

解　由于$\frac{\partial^2 M(x,y)}{\partial y^2}=2$，故对于每个给定的 x，M 关于 y 是凸的，于是对策值 v 为

$$v=\min_{y}\max_{x}(x-y)^2=\min_{y}\max(y^2,(1-y)^2)=1/4$$

乙的优策略应为使 $\max[y^2,(1-y)^2]$取极小值者，易见 $y^*=1/2$。

再求甲的优策略。由前面讨论应先求出 x_i，使 $M(x_i,\frac{1}{2})=v$，或$(x_i-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$. 由此解出 $x_1=0$ 或 $x_2=1$，下面再求权系数 α，为此，解方程

$$\alpha M'_y(0,\frac{1}{2})+(1-\alpha)M'_y(1,\frac{1}{2})=0.$$

由此得 $\alpha=\frac{1}{2}$，从而甲的优策略为 $F^*=\frac{1}{2}I_0(x)+\frac{1}{2}I_1(x)$。解毕。

例 2　设红、蓝两军作战，红方守卫两个据点 A，B，其战略价值分别估计为 K_1，K_2，(K_1，K_2，均为正数)，蓝方进行攻击。为简单计，设红、蓝两军兵力相当，且设各有兵员总数为 S，此时蓝方可用其一部分兵力 x 攻击据点 A，这里 $0\leqslant x\leqslant S$，而以剩下的兵力 $S-x$，攻击 B，红方可用部分兵力 y 守卫 A，而以 $S-y$ 守卫 B，这里 $0\leqslant y\leqslant S$，再假设作战效果与双方兵力的差距有关，故作战效果即支付可设为：

$$M(x,y)=\begin{cases}K_1(x-y), & 若\ x\geqslant y;\\ K_2(y-x), & 若\ x\leqslant y.\end{cases}$$

其中 K_1，可解释为蓝方在攻击 A 时在取得突破时每单位净剩兵员取得的代价。

显见 $M(x,y)$ 关于每个 x 都是 y 的凸函数，它的图形是由两条直线组成的折线（见图 4.3.1）易知

$$v=\min_y\max_x M(x,y)=\min_y\max[K_2y,K_1(S-y)]$$

若设函数 $\max[K_2y,K_1(S-y)]$ 的极小值在 y 处取得，则有 $K_2y=K_1(S-y)$，从而 $y^*=\frac{K_1S}{K_1+K_2}$，即红方的优策略应按 A，B 之战略价值，分别以 $\frac{K_1S}{K_1+K_2}$ 与 $\frac{K_2S}{K_1+K_2}$ 的比例布署兵力，而此时的对策值为 $v=\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}S$.

下面再分析兰军的兵力布署，此时令

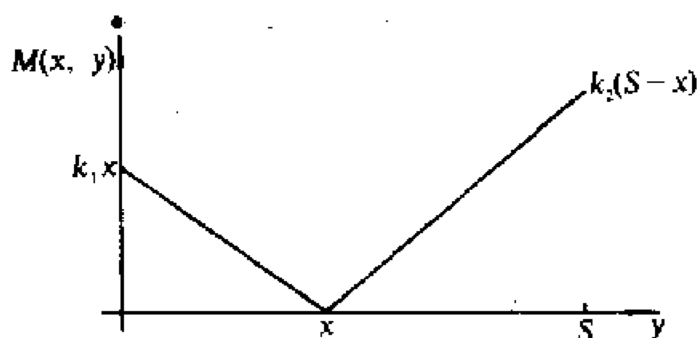


图 4.3.1

$$M(x,\frac{K_1S}{K_1+K_2})=v,$$

不难解出方程的两个解：$x_1=0$，$x_2=S$，又因 $M'_y(0,y^*)=K_2$，$M'_y(S,y^*)=-K_1$，所以

$$F^*(x)=\alpha I_0(x)+(1-\alpha)I_s(x)$$

但由 $\alpha K_2+(1-\alpha)(-K_1)=0$，推出 $\alpha=\frac{K_1}{K_1+K_2}$.

此结果说明防卫方应以 A、B 两地的价值按比例布署兵力，而攻击方却应集中兵力攻击一个据点，其选择 A、B 作为攻击点的概率分别是 $\frac{K_2}{K_1+K_2}$ 及 $\frac{K_1}{K_1+K_2}$，假如 $K_2=3K_1$，那么一般说来攻击 A 地的概率为 0.75，而攻击 B 地的概率为 0.25，也即蓝方显然选择易于攻击点进行攻击。

§4　选时对策——格斗

在应用中——军事或经济领域中都有实例——人们常需在一竞争或对抗的环境中对于时间的选取作出抉择。在这类问题中，局中人所采取的行动假设都是事先给定的，局中人的策略是决定何时实行这些行动。一类简单的模型是双方持枪决斗。假设双方枪

膛中均只有一颗子弹，一种方法是看到对手立即射击，但此时却可能因为时间仓促，慌乱紧张而未能射中对手，反而使自己处于只能被射击的地位，当然另一种是推迟射击时间，平定紧张情绪，瞄准对方射击，但这却有可能由于此种延迟而首先被对方射中，故应作出关于最佳射击时间的选择。此类问题也可见于其他有关选择时机的斗争中，适当推迟时间，利用此间隙尽可能收集对方的情报，作出何时采取行动的决定，可以更准确有力的打击对方，假如能了解关于对方的信息，称此种决斗为有声决斗或格斗(noisy duel)。如果双方都无法了解对方只能凭经验进行决斗，则称为无声决斗或格斗(Silent duel)。

1　先讨论有声格斗，假设每一方都只有一发弹，假若一方射击失败，另一方便获得能准确将对方击中的机会。不妨设开始时双方之间的距离为 D，双方在互相靠近以致于不容许任何一方能够退却，当然双方都会努力提高自己射击的精度。再设精度与距离有关，相距愈近，精度愈高。当然精度最好是 1，但此时可能决斗者已经面对面了。

甲的策略可以是当对手乙未进行射击或射击失败，此时甲只要认为他具有射击精度为 1 的把握，他便可下令射击。设甲的策略是在相距为 x 处射击，$0 \leqslant x \leqslant D$，类似地，乙的策略是在相距为 y 处射击，$0 \leqslant y \leqslant D$，设甲、乙的射击精度分别为 $P_1(x)$ 及 $P_2(y)$，即 $P_1(x)P_2(x)$ 分别是甲、乙在射距为 x、y 时命中对手的概率。当然假设射距减小时精度增大。再假设衡量决斗的效用是若一方生存，生存方评价为 $+1$，双方均生存或均未生存，均评价为 0，于是甲的支付当然是他生存的期望，它与三种可能的射距有关：在乙射击之前射击；与乙同时射击；在乙射击之后射击。于是给出：当 $x > y$ 时

$$M(x,y) = P_1(x) \times 1 + [1 - P_1(x)] \times (-1) = 2P_1(x) - 1$$

而当 $x = y$ 时

$$M(x,y) = P_1(x)[1 - P_2(x)] + P_2(x)[1 - P_1(x)] \times (-1)$$

$$= P_1(x) - P_2(x),$$

当 $x<y$ 时 $M(x,y)=1-2p_2(y)$，从而甲的支付为：

$$M(x,y)=\begin{cases} 2P_1(x)-1, & 若\ x>y; \\ P_1(x)-p_2(y), & 若\ x=y; \\ 1-2P_2(y), & 若\ x<y. \end{cases} \tag{4.4.1}$$

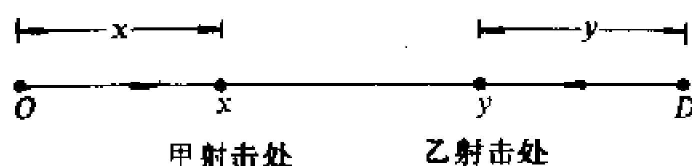


图 4.4.1

注意甲、乙是相向运动，当甲由[0,D]的"0"端点向 D 运动时，乙是由[0,D]的另一个端点"D"向 0 运动，$P_1(x)$与 $P_2(y)$均是随着 x,y 的增大而增大，于是

$$\max_x \min_y M(x\ y) = \max_x \min\{2P_1(x)-1, P_1(x)-P_2(x), 1-2P_2(y)\} \tag{4.4.2}$$

现将[0,D]分为如下三个子区间：

区间	A	B	C
x 的特点	$p_1(x)+P_2(x)\geqslant 1$	$p_1(x)+P_2(x)=1$	$p_1(x)+P_2(x)\leqslant 1$

再设

$$\mu(x) = \min[2P_1(x)-1, P_1(x)-P_2(x), 1-2P_2(x)] \tag{4.4.3}$$

则

$$\max_x \min_y M(x,y) = \max_x \mu(x)$$

$$= \max[\max_{x\in A}\mu(x), \max_{x\in B}\mu(x), \max_{x\in C}\mu(x)]$$

当 $x \in A$ 时，$P_1(x)+P_2(x) \geqslant 1$，从而 $1-2P_2(x) \leqslant P_1(x)-P_2(x) \leqslant 2P_1(x)-1$，故此时应取 $\mu(x)=1-2P_2(x)$，类似地可推出 $x \in B$ 时，$\mu(x)=P_1(x)-P_2(x)$；$x \in C$ 时 $u(x)=2P_1(x)-1$.

若取 x^* 使 $P_1(x^*)+P_2(x^*)=1$，则显然也有：$\max\limits_{x \in A}\mu(x)=1-2P_2(x^*)$，$\max\limits_{x \in B}\mu(x)=P_1(x^*)-P_2(x^*)$，$\max\limits_{x \in C}\mu(x)=2P_1(x^*)-1$，所以

$$\begin{cases}\max\limits_{x}\min\limits_{y} M(x,y) = P_1(x^*) - P_2(x^*) \\ P_1(x^*) + P_2(x^*) = 1.\end{cases} \tag{4.4.4}$$

类似地推知

$$\begin{cases}\min\limits_{y}\max\limits_{x} M(x,y) = P_1(y^*) - P_2(y^*) \\ P_1(y^*) + P_2(y^*) = 1\end{cases} \tag{4.4.5}$$

这证明 $M(x,y)$ 有鞍点 (x^*,y^*)，由此推出双方的最佳射击距离是当 $P_1(l)+P_2(l)=1$ 时的距离 l，此时对策值 $v=P_1(l)-P_2(l)$.

2　上面是对策有鞍点的情形，这是由于我们假设双方有同样的战术评分，但若生存的评价不同，即支付依何者生存而定，可能会出现无鞍点的情形。例如一架轰炸机与一架战斗机，不论其成本、用途、作战效果均不相同，当然不好认为评价也相同。

假设格斗双方互相接近，但仍设双方各只有一发子弹（或两架飞机。各只有一枚空空导弹），射击精度分别为 $P_1(x)$ 与 $P_2(y)$，仍假设为有声格斗，也即当一方射击失败另一方肯定会获取一次有效射击的机会，此时假设甲的支付为

乙 \ 甲	生存	伤亡
生存	0	α
伤亡	β	γ

且设 $\alpha>\beta$，于是仿前讨论可知甲的支付为：

$$M(x,y)=\begin{cases}(\alpha-\beta)P_1(x)+\beta, & 若\ x<y;\\ \alpha P_1(x)+\beta P_2(x)\\ +(\gamma-\beta-\alpha)P_1(x)P_2(x), & 若\ x=y;\\ \alpha-(\alpha-\beta)P_2(y), & 若\ x>y.\end{cases}\tag{4.4.6}$$

现计算$\max\limits_x\min\limits_y M(x,y)$及$\min\limits_y\max\limits_x M(x,y)$，由于$P_1(x)$及$P_2(y)$均为单调增大，故

$$\max_x\min_y M(x,y)=\max_x\min[(\alpha-\beta)P_1(x)+\beta,\alpha P_1(x)+\beta P_2(x)+(\gamma-\beta-\alpha)P_1(x)P_2(x),\alpha-(\alpha-\beta)P_2(x)]\tag{4.4.7}$$

$$\min_y\max_x M(x,y)=\min_y\max[(\alpha-\beta)P_1(y)+\beta,\alpha P_1(y)+\beta P_2(y)+(\gamma-\beta-\alpha)P_1(y)P_2(y),\alpha-(\alpha-\beta)P_2(y)]\tag{4.4.8}$$

但是$(\alpha-\beta)P_1(x)+\beta$为单调增加，而$\alpha-(\alpha-\beta)P_2(x)$为单调减少，所以若解方程

$$(\alpha-\beta)P_1(x)+\beta=\alpha-(\alpha-\beta)P_2(x)\xlongequal{记其值为}z_0$$

解出x_0，对此必有$P_1(x_0)+P_2(x_0)=1$，若设$(\gamma-\beta-\alpha)>0$，则有：

$$\alpha P_1(x_0)+\beta P_2(x_0)+(\gamma-\beta-\alpha)P_1(x_0)P_2(x_0)>z_0$$

把它们与(4.4.7)，(4.4.8)合起来考察便得：$\max\limits_x\min\limits_y M(x,y)=z_0$，而$\min\limits_y\max\limits_x M(x,y)>z_0$，即当$\gamma-\beta-\alpha>0$时对策无鞍点。类似地，当$\gamma-\beta-\alpha<0$时有$\min\limits_y\max\limits_x M(x,y)=z_0$，而$\max\limits_x\min\limits_y M(x,y)<z_0$，此时对策也没有鞍点。

假如$\gamma-\beta-\alpha=0$时，对策在x_0处有一鞍点。

在不存在鞍点时应使用混合策略，但我们不拟在此计算，只将有关结果写出，即当$\gamma-\alpha-\beta>0$时对策有值为$v(\Gamma)=(\alpha-\beta)P_1(x_0)+\beta$，其中$P_1(x_0)+P_2(x_0)=1$，甲方有一优纯策略$F^*(x)=$

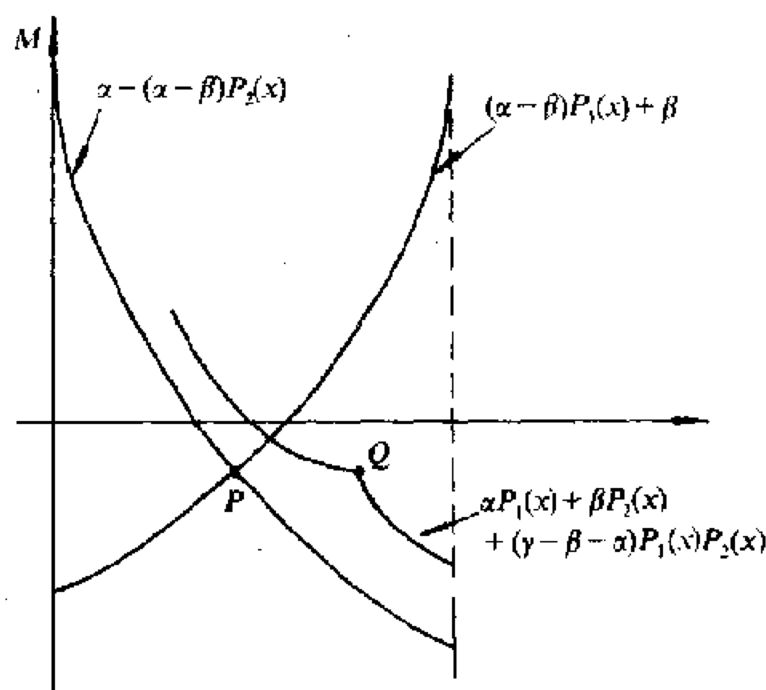


图 4.4.2

$I_{x_0}(x)$，乙方没有优策略，他可以采取尽可能接近 x_0（但不等于 x_0）的纯策略。类似地，当 $(\gamma-\beta-\alpha)<0$ 时乙有一个优纯策略而甲却没有优策略。

3. 再讨论双方各可射击多发子弹的有声格斗。为简单计，先设双方具有同样的射击精度，这里假设双方具有相同的战斗价值，因此评分相同，即一方生存时生存者评分得+1，其他情形评分为0. 这样相对来说易于求出优策略。假设在时间 t 时甲、乙分别有 $m(t)$ 和 $n(t)$ 发弹，并设他们的相同射击精度（函数）为 $P(t)$，可证当 $P(t)=1/(m(t)+n(t))$ 时局中人的任何一方的优策略是在此时射出一发弹（证明略）。然而一般说来当格斗双方手中各握有几发弹时，除非 $P(t)>1/(m(t)+n(t))$，否则他们不会射击。当他的对手不能射击时他们手中握有时时刻刻可以射击的权力。这时的对策值 $v=(m(0)-n(0))/(m(0)+n(0))$。例如甲有 2 发弹，乙有 3 发弹，此时当射击精度 $P(t)=1/5$ 时便可开始射击，例如甲

开始射击，而当 $P(t)=1/4$ 时双方都会射击，对策值 v（对于甲）是 $-1/5$。

4. 在有声格斗时双方各有一发弹，但精度可变时的情形。一般设精度为时间的增函数，因为我们通常是假设决斗双方是互相接近的。现在去掉此假设，只设在时刻 $t>0$ 时甲、乙的射击精度分别为 $P_1(t),P_2(t)$，它们是 t 的连续函数，但不假设为单调，同时不妨设当 $t>t_0$ 时 $P_1(t)=P_2(t)=C$，假设甲在 t_1 时刻射击但未击中，乙可在 (t_1,T) 区间中选取使 $P_2(t)$ 取极大的时刻 t_2 进行射击，反之亦然。此时策略对 (t_1,t_2)（这里局中人的策略是用时刻来描述的），设 $T=\min(t_1,t_2)$，$m_i(T)=\max\limits_{t\geq T}P_i(t)$，$i=1,2$ 则甲的支付设为：

$$M(t_1,t_2)=\begin{cases}F(T)=P_1(T)-[1-P_1(T)]m_2(T), & 若\ t_1<t_2;\\ g(T)=-P_2(T)+[1-P_2(T)]m_1(T), & 若\ t_2<t_1;\\ h(T)=P_1(T)-P_2(T), & 若\ t_1=t_2;\end{cases} \tag{4.4.7}$$

再定义

$$F(t)=\max_{\tau\leq t}f(\tau),\qquad G(t)=\min_{\tau\leq t}g(\tau) \tag{4.4.8}$$

则可证如下的结论：

(1)若曲线 $F(t)$ 与 $G(t)$ 首次在 T_0 处相交，则对策值 $v=F(T_0)=G(T_0)$ 此时存在 $t_1\leq T_0$ 及 $t_2\leq T_0$ 使得 $f(t_1)=g(t_2)=v$，且 $\max(t_1,t_2)=T_0$，对于甲、乙的近似优策略可由随机地选取靠近 t_1、及 t_2 的时刻而求得(这时不考虑函数 $h(T)$ 的任何效应)。

(2)若 $F(0)\geq G(0)$，则 $v=\text{med}\{f(0),g(0),h(0)\}$，这里 med $\{.,.,.\}$表示取$\{。,。,。\}$的中间值。若 $\varepsilon>0$ 为随机选取之小数，解 (t_1,t_2) 为 $(0,\varepsilon)$，$(\varepsilon,0)$ 或 $(0,0)$ 分别视 $f(0)$，$g(0)$ 及 $h(0)$ 中何者为中间值而定。

例如设 $T_0=\frac{2}{3}$，精度分别为 $C=\frac{1}{3}$，$P_1(t)=\left|\frac{1}{3}-t\right|$，$P_2(t)=$

$\frac{1}{2}-\left|\frac{1}{2}-t\right|$，此为情形(1)。此时 $v=0, t_1=0, t_2=\frac{2}{5}$，若到达 $t=\frac{2}{5}$ 时，甲失误了射击之机，此时乙可以 $t=\frac{2}{5}$ 为起始时刻，把问题看作一个新的对策而重新进行计算，此时是(2)的情形，对策值 $v=-\frac{1}{6}, t_2=\frac{1}{2}, t_1=0.54$.

5. 无声格斗，每一方有一发弹，有相同的精度。在此情况中，一般设在格斗开始时每一方程有多少弹丸，但却不了解对方在战斗过程中发射过几发。现假设双方在战斗一开始各握有一发弹，格斗者已无机会退却，并正互相接近。假设两战斗方有相同射击精度，也即双方在同一时间相互射击，双方有相同的被杀伤的概率。由于设精度可随时间增长，因而每一格斗者希望尽可能推迟他们射击的时间，然而推迟射击，他被其对手射击的可能性也在增长。由于格斗是无声的，所以他并不知道其对手是否已经射击过。现设战斗双方之价值相同，并以甲为标准，给出如下评价：

甲＼乙	生存	击中
生存	0	1
击中	−1	0

此外设甲于精度为 x 时进行射击，乙于精度为 y 时进行射击，这里 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$，于是甲之期望支付为：

$$M(x,y)=\begin{cases}x+(1-x)y(-1)=-y+(1+y)x, & \text{若 } x<y\\ x(1-x)+x(1-x)(-1)=0, & \text{若 } x=y\\ y(-1)+(1-y)x=-y+(1-y)x, & \text{若 } x>y\end{cases} \tag{4.4.9}$$

可求得

$$\max_x \min_y M(x,y) = 2\sqrt{2} - 3, \min_y \max_x M(x,y) = 3 - 2\sqrt{2}$$

由此可见对策没有鞍点。若甲采用混合策略 F，而乙采用纯策略 y，则甲之期望为：

$$\begin{aligned}
E(F,y) &= \int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F(x) \\
&= \int_{x=0}^{x=y-0} M(x,y)\mathrm{d}F(x) + \int_{y+0}^{1} M(x,y)\mathrm{d}F(x) \\
&= \int_0^{y-0} [-y + (1+y)x]\mathrm{d}F(x) \\
&\quad + \int_{y+0}^{1} [-y + (1-y)x]\mathrm{d}F(x) \\
&= y[F(y) - F(y-0)] - y \\
&\quad + (1+y)\int_0^{y-0} x\mathrm{d}F(x) + (1-y)\int_{y+0}^{1} x\mathrm{d}F(x)
\end{aligned}$$

若设混合策略 F 为在 $(\alpha,1)$ 上的一个密度函数，即

$$\mathrm{d}F(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ P(x), & \alpha \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

于是

$$E(F,y) = \begin{cases} -y + (1+y)\int_\alpha^y xP(x)\mathrm{d}x \\ \quad + (1-y)\int_y^1 xP(x)\mathrm{d}x, & 若\ y \geqslant \alpha \\ -y + (1-y)\int_\alpha^1 xP(x)\mathrm{d}x, & 若\ y \leqslant \alpha \end{cases} \tag{4.4.10}$$

由于对策为对称，故对策值为 0，这就推出若有一密度函数 P 作为它的解，则对一切使 $P(y) \neq 0$ 的 y，$E(F,y) = v = 0$，所以若对策有一个密度函数作为它的解，则必有

$$-y + (1+y)\int_\alpha^y xP(x)\mathrm{d}x + (1-y)\int_y^1 xP(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{4.4.11}$$

其中 $\alpha\leqslant y\leqslant 1$，将上式微分两次，可得：

$$3P(y)+yP'(y)=0$$

解此微分方程便得：$P(y)=\frac{C}{y^3}$，把它代入(4.4.11)中便得：

$$-y+(1+y)C\int_{\alpha}^{y}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}+(1-y)C\int_{y}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=0$$

或

$$-y+C(1+y)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{y}\right)+C(1-y)\left(\frac{1}{y}-1\right)=0$$

其中 $\alpha\leqslant y\leqslant 1$. 由于上式成立与 y 无关，由此解出 $\alpha=\frac{1}{3}$，$C=\frac{1}{4}$

现证甲、乙的最佳射击策略是当 $x<\frac{1}{3}$时不必射击，而当$\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$ 时密度 $P(x)=\frac{1}{4}x^3$ 且射击精度为 x 时可进行射击。假设甲采用此策略，于是对$\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant 1$，有

$$E(F^*,y)=-y+\frac{(1+y)}{4}\int_{\frac{1}{3}}^{y}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}+\frac{(1-y)}{4}\int_{y}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=0$$

而对于 $y\leqslant\frac{1}{3}$，有

$$E(F^*,y)=-y+\frac{(1+y)}{4}\int_{\frac{1}{3}}^{y}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}\geqslant 0$$

所以对于甲、乙其优策略为下述之混合策略：

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\\ \frac{1}{8}\left(9-\frac{1}{x^2}\right), & \text{若 }\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\qquad(4.4.12)$$

6. 有声——无声格斗，双方各有一发弹。这是一种混合的情况，即其中有一方能了解其对手是否射击的信息，这就构成一种有别于以上所述的情况。为确定计，设甲方是无声的，而乙方是有声的。并设双方的射击精度相同，再设 x 和 y 分别为甲、乙在射击时

的精度，仿过去模型，甲方的支付为

$$M(x,y)=\begin{cases}x-y+xy, & 若\ x<y\\ 1-2y, & 若\ x>y\\ 0, & 若\ x=y\end{cases}\qquad(4.4.13)$$

可以验证对策的值为 $v=5-2\sqrt{6}=0.101$，并可验证甲有一个“无声”弹，他有唯一的优策略，即如下之密度函数：

$$f(x)=\begin{cases}0, & 或\ 0\leqslant x\leqslant a\\ \dfrac{\sqrt{2}\,a}{(x^2+2x-1)^{\frac{3}{2}}} & 若\ a\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\qquad(4.4.14)$$

Z 也有唯一的优策略，即

$$G(y)=\frac{2}{2+a}\int_0^y f(y)\mathrm{d}y+\frac{a}{2+a}I_1(y)\qquad(4.4.15)$$

其中 $f(y)$ 与 $f(x)$ 为相同之密度函数，其证明与讨论均略。

7，无声格斗：一对二，相同精度。这是指有一方只有一发弹而另一方有两发弹的情形。仍设精度随着时间增加而单调增加，从安全角度看，拥有两发弹的一方，将会把两发弹分开发射，并且尽量将其第二发弹保留到最后，而只握有一发弹者却要依两种不同的密度分布规律来考虑其对手的攻击。

设甲方握有一发弹，他选择的射击时刻为 x，$0\leqslant x\leqslant 1$，乙握有两发弹，选择的射击时刻分别为 y 与 z，其中 $0\leqslant y\leqslant z\leqslant 1$，并设精度用时间来描述，甲的支付为：

$$M(x,y,z)=\begin{cases}x-(1-x)y-(1-x)(1-y)z & 若\ x<y\leqslant z;\\ -y+(1-y)x-(1-y)(1-x)z, & 若\ y<x\leqslant z;\\ -y-(1-y)z+(1-y)(1-z)x, & 若\ y\leqslant z<x.\end{cases}$$

(4.4.16)

这个问题的解讨论起来篇幅甚长。此处略，但给出大概的描述。此对策有值，甲方（握有一发弹者）处于不利地位，对于他来说格斗的值为

$v=\frac{2-3a}{2+3a}=-0.30650$，其中 $a=\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{3}}}\approx 1.25593$，甲有唯一的最优混合策略，其比例分配为：

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } 0\leqslant x\leqslant \alpha \\ \frac{k}{x^3}, & \text{若 } \alpha\leqslant x\leqslant b \\ \frac{l}{x^3}, & \text{若 } b\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

其中：

$$k=\frac{a(1-b)}{1+2a-b}\approx 0.13805,\quad l=\frac{a}{1+2a-b}\approx 0.25766,$$

$$\alpha=\frac{1}{1+2a}\simeq 0.28475,\quad b=\frac{1}{1+2\sqrt{1/3}}\approx 0.45410$$

若甲采用上述策略，乙可以在 α 与 b 之间的一个时刻射击第一发弹，并在 b 之后射击他的第二发弹，这样他就可保证对策值维持在所给的 v 值处。乙发射第一发弹的概率其分配比例为：

$$g(y)=\begin{cases}0, & \text{若 } 0\leqslant y\leqslant \alpha \\ m/y^3, & \text{若 } \alpha\leqslant y\leqslant b \\ 0, & \text{若 } b\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$$

其中 $m=3/(4+6a)\simeq 0.26006$，而第二发弹的射击时刻的概率密度函数为：

$$h(z)=\begin{cases}0, & \text{若 } 0\leqslant z\leqslant b \\ n/z^3, & \text{若 } b\leqslant z\leqslant 1 \\ r, & \text{若 } z=1\end{cases}$$

其中 $r=2-\sqrt{3}\doteq 0.26795$，$n=3r/2\doteq 0.40192$，关于 y 与 z 的随机选取是互相独立的（图 4.4.3）。

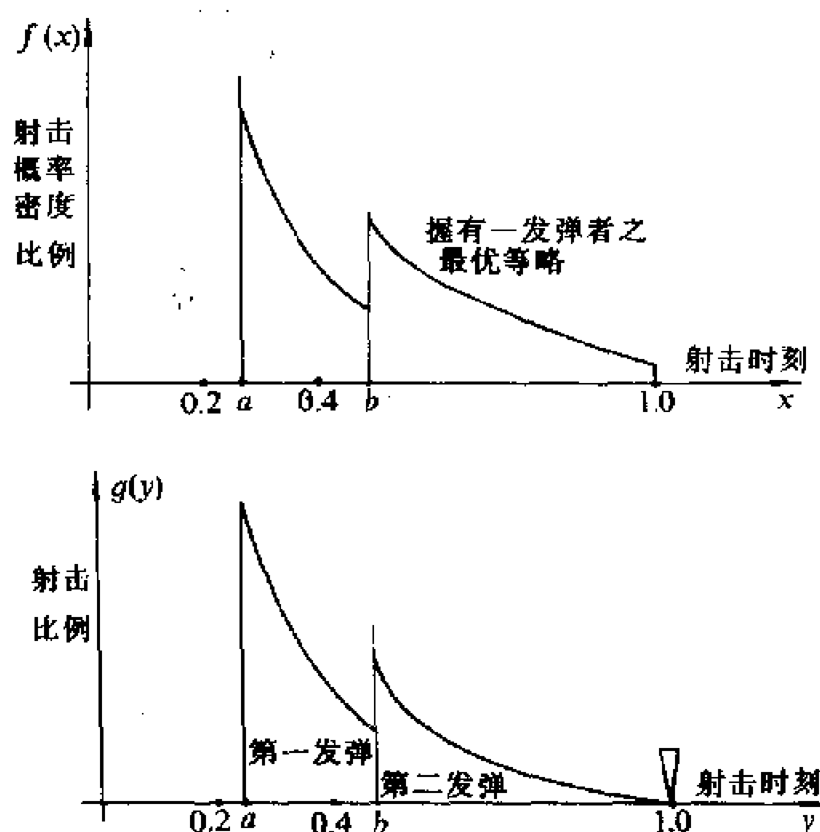


图 4.4.3

8. 无声格斗，具有正的初始精度。这种情况是指在无声条件下每个战斗者握有一发弹，双方射击精度相同并且随着时间的延迟而单调增加，但是它们有一个初始精度 a。换言之，格斗双方在射击精度尚未达到值 a 之前是不会射击的。加上此约束条件后需要对无声格斗的解进行修改，不过限于篇幅，我们只作描述而不予以证明。

设 $f(x)=1/4x^3$ 为概率密度函数，可以验证它也是在没有约束时无声格斗的解。格斗双方的行为依赖于 a 的大小，具体说：

(1)若 $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}$，当 $\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$ 时可按概率密度 $f(x)$ 进行射击，而当 $x<\frac{1}{3}$ 时决不射击。

(2)若$\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$，设$(\frac{1}{3},b)$为如下区间，在此区间$f(x)$的质量中心位于$a$处。此时当$x>b$时按$f(x)$进行射击，而在其他区域将射击的概率集中于$a$处。

(3)若$\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$，则总是在$a$时射击。

为了说明这个解，不妨设$a=\frac{4}{9}$，这是(2)的情形。为了确定b，我们需要解方程：

$$\frac{\int_{\frac{1}{3}}^{b}xf(x)\mathrm{d}x}{\int_{\frac{1}{3}}^{b}f(x)\mathrm{d}x}=\frac{4}{9}$$

这里$f(x)=\frac{1}{4x^3}$，由此得到$b=\frac{2}{3}$，所以对于格斗者来说，在$\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 1$中双方依概率密度$\frac{1}{4x^3}$进行射击，这要用去概率的$\frac{5}{32}$，而在剩下的$\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}$区间中却集中于$a=\frac{4}{9}$处射击，这要用去概率的$\frac{27}{32}$.

我们在以上三种情况的平均射击精度为$\max(\frac{1}{2},a)$，这相当于把它们看作是有声时，双方具有相同的射击精度函数的格斗，并且他们总是当精度超过a时才会射击。

9. 无声格斗，每一方具有m发弹，并假设双方有相同的精度函数，且为无声格斗。此时当双方共射击第$m+1-k$发弹时，在区间$\frac{1}{2k+1}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2k-1}$中是依负三次方的规律$\frac{1}{4}kx^{-3}$的概率密度进行射击的，对策值为零。此外可注意到在有声情况下在相同区间中发射第$m+k-1$发弹的时刻应在区间的调和平均处，即$\frac{1}{2}k$.

10. 无声格斗，严格单调的精度。将前面讨论中双方有相同的

严格增加精度函数的限制去掉，并假设在无声格斗中双方有相同的精度函数，但它们是严格单调的，每一方只有一发弹。设 $P_1(t)$ 及 $P_2(t)$ 分别为甲、乙进行射中的概率，并设 $P_1(0)=P_2(0)=0$，且 $P_1(1)=P_2(1)=1$，现定义：

$$f(t)=\frac{p'_2(t)}{p_1(t)p_2^2(t)},g(t)=\frac{p'_1(t)}{p_2(t)p_1^2(t)}$$

再设 a_1，a_2 为由如下方程所确定的数：

$$\int_{a_1}^{1}\frac{1-p_1(t)}{2}f(t)\mathrm{d}t=1,\quad \int_{a_2}^{1}\frac{1-p_2(t)}{2}g(t)\mathrm{d}t=1$$

并设 $a=\max(a_1,a_2)$，此时可将双方的优策略陈述如下：甲的精度函数为 $p_1(t)$，它的优策略是按照下面的累积分布函数进行射击：

$$F(t)\begin{cases}0, & 若\ 0\leqslant t\leqslant a;\\ \int_a^t f(t)\mathrm{d}t\Big/\int_{a_1}^1 f(t)\mathrm{d}t, & 若\ a\leqslant t\leqslant 1;\\ 1, & 若\ t=1.\end{cases}$$

乙的精度函数为 $p_2(t)$，他的优策略由如下的累积分布函数为：

$$G(t)=\begin{cases}0, & 若\ 0\leqslant t\leqslant a\\ \int_a^t g(t)\mathrm{d}t\Big/\int_{a_2}^1 g(t)\mathrm{d}t, & 若\ a\leqslant t\leqslant 1\\ 1, & 若\ t=1.\end{cases}$$

换言之，若 $a_1<a$，甲在 $t=1$ 处有一个跳跃。对策值为：

$$v=\begin{cases}\dfrac{1-3P_2(a)}{1+P_2(a)}, & 若\ a=a_1;\\[2ex] \dfrac{-1+3P_1(a)}{1+P_1(a)}, & 若\ a=a_2.\end{cases}$$

以上诸结果均不给予证明。

例如甲的精度函数为 $P_1(x)=x$，而乙的精度函数不妨设为 $P_2(x)=P\ (x)$，设 α,β 分别为甲、乙的射击精度为 1 的时刻的概率。下面列出不同形式下的结果：

$P(X)$	a	t	α	β
x	0.333	0	0	0
$\frac{2x^2}{1+x^2}$	0.409	0.1021	0	0.0764
$\frac{x(3-x)}{2(2-x)}$	0.372	0.0838	0.0063	0
$\frac{x}{2-x}$	0.414	0.1720	0	0
x^3	0.481	0.2481	0	0.0729
$\frac{2x^2}{4x^2-5x+1}$	0.415	0.0280	0	0.1741

11. 无声格斗，连续射击。这里假设格斗者可以在 0 与 1 之间改变自己的射击率，这种改变是连续的，所以这种连续射击的无声格斗的每一个混合策略都被一个纯策略所优超。

设 $R(t)$为射击率，$A(t)$为精度密度函数，即在时刻 t 时在单位时间进行射击时毁伤的概率，于是对于在区间$(0,t)$上生存的概率为：

$$P(R,t) = \exp\{-\int_0^t A(u)R(u)\mathrm{d}u\},$$

其中 $0 \leqslant R(t) \leqslant 1$，$\int_0^t R(t)\mathrm{d}t = \beta \leqslant 1$，$\beta$ 为弹药总量。

如果 S 为所有策略的集，那么一个混合策略便是一个分布函数 F，其中$\int_s dF(R) = 1$，如果格斗者在时刻 t 未被杀害，其对手生存的概率是：

$$\varphi(F,t) = \int_s \exp\{-\int_0^t A(u)R(u)\mathrm{d}u\}\mathrm{d}F(R)$$

对应于任何混合策略 F，存在一个纯策略 $R_F = \int_s R\mathrm{d}F(R)$，它是一致的好于 F，并且与对手的行动无关。

12. 目标预测。在交战中需要对一运动目标的位置进行监测，但交战中常会遇到各种干涉，因此在有干涉时更好的瞄准目标是一类典型的问题。目标可能是一艘船、一架飞机或行动中的步兵，

对他们的攻击可能是使用轰炸机、高射炮或者是狙击手。在每一种情况下在对目标的侦察与弹丸到达目标之间有一个时间延迟。不妨设在大海中有一艘战舰探测到有一架敌方轰炸机出现，但对战舰来说，轰炸机飞得甚高，以致难以对飞机进行攻击，然而战舰可采取战术行动以便扰乱对方对自己位置的预测，战舰关心的是它自己如何能不被击中。假设飞机只携带一枚炸弹，并假设轰炸机的瞄准是很难的，但在它准备投弹与爆炸之间有一时间延迟，因而轰炸机应瞄准船的未来位置。

为要得到关于此类问题的解决思路，应将问题加以简化。若将海看作是"一维的"且是"离散的"，并设战舰位于很长的一行的点列上，战舰在每个单位时刻由它所在位置向左或向右移动一个单位。另外假设时间延迟是两个单位，或说战舰在这段时间内已作过两次移动，对于轰炸机，其支付为：若击中战舰，评分为 1，否则为零。战舰的策略与它先前的行动有关。由于战舰的最近两个动作之前的行动已为对手观测到，故可合理的假设战舰与它被观察到的位置相比不会走得太远。此时假设战舰也发现了敌机，它可作的选择是在前一步的基础上采取的，它可用概率 x 向原运动方向之反方向运动，也可以 $1-x$ 的概率向原方向移动，每次都是移动一个单位。第二次移动结束时战舰可能位于三个可能的位置之一，而相应于此三位置的概率分别是：$(1-x)^2, x(1-x)+(1-x)x, x^2$，轰炸机可以瞄准三个位置之一，因假设瞄准系统甚佳，故可假设瞄准便能击中。此时轰炸机的期望支付是：

$$M=\begin{cases}(1-x)^2, & \text{若瞄准战舰目前位置沿前进方向两单位位处；}\\ 2x(1-x), & \text{若瞄准战舰的目前位置；}\\ x^2, & \text{若瞄准战略目前位置后退方向两单位处。}\end{cases}$$

如果只限于以上策略的话，战舰的优策略便是选取 x 使这三个概率中之最大者为最小，即取 x^* 使

$$M(x^*) = \min\max\{(1-x)^2, 2x(1-x), x^2\}$$
$$= \min\{1, \frac{1}{2}, 1\} = \frac{1}{2}, \quad \text{其中 } x^* = \frac{1}{2}$$

显然这是战舰的唯一优策略，而轰炸机具有 ε 优策略，即 $x^*-\varepsilon$.

§5 可离对策

我们曾讨论过有限对策的一般解法，这类解法均可在有限步内完成。但对于无限对策而言却无一般解法。对于任给的一个无限对策，也未必能在有限步内解出，但是对于一些特殊形式的对策，却可用一些特殊的方法将它解出。下面要介绍的一类对策，其支付函数是甲、乙两局中人的策略的"可分离"函数，它们有一种解法。

设甲在[0,1]中选取策略 x，乙在[0,1]中选取策略 y. 所谓支付为可分离(Separable，简称可离)，它是指支付函数 $M(x,y)$取如下形式：

$$M(x,y) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} r_i(x) s_j(y) \qquad (4.5.1)$$

其中 $r_i(x)$，$s_j(y)$均为连续函数，$i=1,2,\cdots,m$. $j=1,2,\cdots,n$，并称此无限对策为可离对策，(Separable game)。

现在考虑混合策略，甲的混合策略可用累积分布函数 $F(x)$表示，乙的混合策略为累积分布函数 $G(y)$，于是(对于甲)期望支付便是

$$\Phi(F,G) = \int_0^1\int_0^1 M(x,y)\mathrm{d}F(x)\mathrm{d}G(y)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\int_0^1 r_i(x)\mathrm{d}F(x)\int_0^1 s_j(y)\mathrm{d}G(y)$$

若令

$$\begin{cases} r_i = \int_0^1 r_i(x)\mathrm{d}F(x), i = 1,2,\cdots,m, \\ s_j = \int_0^1 s_j(y)\mathrm{d}G(y), j = 1,2,\cdots,n, \end{cases} \tag{4.5.2}$$

则对每一个分布函数 $F(x)$，此时对应一个向量 $r=(r_1,\cdots,r_m)$，对每一个分布函数 $G(y)$，也对应一个向量 $s=(s_1\cdots,s_n)$，此时称向量 r 为 $F(x)$的 m 个矩(moments)。同样，称 s 为 $G(y)$的 n 个矩。在这种时候，混合策略的支付可表示成如下的双线性(改记作)：

$$E(r,s) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}r_i s_j \tag{4.5.3}$$

这时原来的无限对策 $\Gamma=<\mathscr{X},\mathscr{Y},M>$便化作 $\Gamma=<R,S,E>$这里 R 是所有上述 r 向量的集，S 为所有上述 s 向量的集，E 为(4.5.3)所示之支付。此时自然会问分布函数 $F(x)$的集与集 R 之间有无等价关系。现在当 x 在[0,1]上变动时由 $r_i=r_i(x)$，$i=1,2,\cdots,m$ 表示的 m 维空间的曲线 C 的轨迹张成一个凸集 D，我们要证这个集 D 就是由点 $r=(r_1,r_2,\cdots,r_m)$的全体构成的集 R，事实上若 $r^0=(r_1^0,\cdots,r_m^0)$为 R 中的点，但却不在 D 中，再设 $F^0(x)$为产生 r^0 之分布函数，也即

$$r_i^0 = \int_0^1 r_i(x)\mathrm{d}F^0(x), i = 1,2,\cdots,m$$

此时必存在超平面将 r^0 与 D 分隔开，也即对给定的 $\delta>0$，以一切 $x\in[0,1]$，有

$$\sum_{i=1}^{m}c_i r_i^0 - \sum_{i=1}^{m}c_i r_i(x) \geqslant \delta \tag{4.5.4}$$

成立。在上式两端关于 $\mathrm{d}F^0(x)$积分，便得：

$$\sum_{i=1}^{m}c_i r_i^0\int_0^1 \mathrm{d}F^0(x) - \sum_{i=1}^{m}c_i\int_0^1 r_i(x)\mathrm{d}F^0(x)$$

$$\geqslant \delta\int_0^1 \mathrm{d}F^0(x)$$

或$\sum_{i=1}^{m}c_ir_i^0-\sum_{i=1}^{m}c_ir_i^0\geqslant\delta$，这就导出 0>0 的矛盾，由此证明了 R 中的一切点均属于 D.

反之，我们将证 D 中的每一点均属于 R. 设 r^0 为 D 中某个点，即 r^0 的分量可表作如下形式：

$$r_i^0=\sum_{k=1}^{m}\alpha_kr_i(x_k),i=1,2,\cdots,m \qquad (4.5.5)$$

其中 $\alpha_k\geqslant0$，且$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k=1$，($x_k,k=1,2,\cdots,m$ 为 x 的 m 个值)不难看出如下之分布函数

$$F^0(x)=\sum_{k=1}^{m}\alpha_kI_{x_k}(x) \qquad (4.5.6)$$

可产生点 r^0，也即 D 中每一点也均属于 R.

类似可证若允许 $G(y)$在所有乙的分布函数集中变动，便可得到点 $s=(s_1,s_2,\cdots s_n)$构成的集 S，此集等价于由 n 维曲线 $C':s_j=s_j(y),j=1,2,\cdots,n,0\leqslant y\leqslant1$ 的轨迹所张成的集 D'.

这样便推出：

定理 4.5.1 由(4.5.2)中的 $r_i(i=1\cdots,m)$表示的 $r=(r_1,\cdots,r_m)$的全体的集 R 等价于由参数表示的曲线 $C:r_i=r_i(x),i=1,\cdots,m,0\leqslant x\leqslant1$ 所张成的凸集 D，

对于 $s_j=s_j(y),j=1,\cdots,n,0\leqslant y\leqslant1$，有相似的结论。

回到(4.5.3)，前已指出支付为 $M(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}r_i(x)s_j(y)$的可离对策已转化为一个新对策，这时甲在 m 一维欧氏空间的凸集 R 中选取策略，乙在 n 一维欧氏空间的凸集 S 中选取策略，而支付也改变成 $E(r,s)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}r_is_j$，只不过集 R,S 分别是曲线 C 及 C' 所张成的凸集。这样便化归我们较熟悉的形式，自然会想到甲、乙的优策略 r^0,s^0 应该满足：

$$\min_{s\in S}E(r^0,s)=\max_{r\in R}E(r,s^0)=v \quad (4.5.7)$$

其中 v 是对策值。由于在凸集上定义的双线型的最小最大定理，可知对策中局中人双方都存在优策略。相应的，对原对策($\mathscr{X},\mathscr{Y},M$)也对应着优策略 $F^*(x)$，$G^*(y)$，它们是由 $r_i(x)$ 及 $s_j(y)$ 的连续性给予保证。

前面已看到每个分布函数 $F(x)$ 有 R 中的一点 r 与之对应(见4.5.21)，反之亦然。对于曲线 C 上的每一点，有如下的坐标：$r_i=r_i(t)$，$i=1,2,\cdots,m$，$0\leqslant t\leqslant 1$. 由于每一个一步阶跃(one—step)的分布函数 $F(x)=I_t(x)$，$(0\leqslant t\leqslant 1)$ 却对应于 R 中的一点 r，使得：

$$r_i=\int_0^1 r_i(x)\mathrm{d}I_t(x)=r_i(t),i=1,2,\cdots,m, \quad (4.5.8)$$

这说明 C 上的点对应于一步阶跃分布函数。另一方面，R 中每一点可用 C 上至多 m 个点的凸组合表示，这就推出 R 中每个点对应着最多有 m 个阶跃(或称为 m 步阶跃)函数。这启示我们可离对策中混合策略所具的形式。

由于每个可离的支付函数 M 可表示作

$$\begin{aligned}M(x,y)&=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}r_i(x)\right)s_j(y)\\&=\sum_{j=1}^{n}r_j'(x)s_j(y) \quad (4.5.9)\end{aligned}$$

其中，假设 $n\leqslant m$、以及 $r_j'(x)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}r_i(x)$，$j=1,\cdots,n$，于是我们把对策看作是在凸集 R'，S 上的双线性对策，这里 R'，S 分别是由曲线 $r_j'=r_j'(x)$，$s_j=s_j(y)$，$j=1,\cdots,n$，$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 所构成的凸集。由于 R'，S 均为 n 一维，故而 R' 及 S 可以由最多有 n 一步阶跃函数所确定，这就推出每个局中人所拥有的混合策略最多有 $\min(m,n)$ 步阶跃。

若进一步将支付函数推广为如下形式：

$$M(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}r_i(x)s_j(y) \tag{4.5.10}$$

并设它关于 y 为一致收敛，此时定义

$$s_i'(y)=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}s_j(y),i=1,2,\cdots,m, \tag{4.5.11}$$

易见 $s_i'(y)$连续，而支付函数可重新写作：

$$M(x,y)=\sum_{i=1}^{m}r_i(x)s_i'(y) \tag{4.5.12}$$

由此可见每个局中人所具有混合(优)策略最多为 m—步阶跃。

以下具体讨论可离对策的解法。在对策的支付表示成(4.5.3)的情况下，可离对策的解也即两局中人的优策略对为(r^*,s^*)，其中 $r^*\in R,s^*\in S$，它们满足：

$$\begin{aligned}\min_{s\in S}\sum_{i,j=1}^{m,n}\alpha_{ij}r_i^*s_j &= \max_{r\in R}\sum_{i,j=1}^{m,n}\alpha_{ij}r_is_j^* \\ &= \sum_{i,j=1}^{m,n}\alpha_{ij}r_i^*s_j^* = v\end{aligned} \tag{4.5.13}$$

(见(4.5.7))。现在的问题是如何寻求 r^*,s^*，由于 $E(r,s)$可写作：

$$E(r,s)=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}r_i)s_j=\sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}s_j)r_i$$

若设

$$\begin{cases}f_j(r)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}r_i, & j=1,2,\cdots,n\\ g_i(s)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}s_j, & i=1,2,\cdots,m\end{cases} \tag{4.5.14}$$

则 $E(r,s)$又可写作：

$$E(r,s)=\sum_{j=1}^{n}f_j(r)s_j=\sum_{i=1}^{m}g_i(s)r_i \tag{4.5.15}$$

这就为我们提供一种求解的设想：$f_j(r)=0,j=1,\cdots,n$ 可看作 n 张超平面，它们把空间 R 分割为有限个部分，分别记作 $R_1,\cdots,R_t$，

$\cdots R_l$，对于 R 中每一点 r^0，代入(4.5.15)，计算 $\min\limits_{S}\sum f_i(r^0)s_j$，求出这些 s 点，并把它们的集记作 $S(r^0)$，它实际上是位于 S 的边界上的一个凸集。类似地，诸平面 $g_i(s)=0, i=1,2\cdots,m$ 把空间 S 分割成有限个部分：$S_1,\cdots,S_j,\cdots S_p$. 取 S 中的每一点 s^0，计算 $\max\limits_{R}\sum g_i(s^0)r_i$，求出这些 r 点，把它们的集记作 $R(s^0)$，现在剩下的是比较 $S(r^0)$ 与 $R(s^0)$，显然，如果 r^0 对应的 $S(r^0)\ni r^0$，那么显见 r^0 便是甲的优策略。同样可分析乙的优策略。至于计算过程可分别就诸域 $R_1,R_2,\cdots,R_l$ 来进行，并利用上面的方法把 R 映射到 S；同时再将诸 S_j 域映射到 R. 这实际上是一种寻求不动点的过程，所以这种方法也叫做不动点方法(Fixed point method)。

例 1　讨论可离对策，其支付为：

$$M(x,y)=y^2(\cos\frac{\pi}{2}x+\sin\frac{\pi}{2}x-1)$$
$$+\frac{4y}{3}(\cos\frac{\pi}{2}x-3\sin\frac{\pi}{2}x)+\frac{1}{3}(5\sin\frac{\pi}{2}x-3\cos\frac{\pi}{2}x)$$

不难知道此函数没有鞍点，所以必须考虑对策的混合策略。设甲的混合策略为 $F(x)$，这相当于在集 R 中选取一个点 $r=(r_1,r_2)$，其中集 R 是由曲线：$r_1=\sin\frac{\pi}{2}x, r_2=\cos\frac{\pi}{2}x, 0\leqslant x\leqslant 1$ 所张成的凸集。类似地，乙的一个混合策略 $G(y)$ 相当于在集 S 中选取点 $s=(s_1,s_2)$，其中 S 为由曲线：$s_1=y, s_2=y^2, 0\leqslant y\leqslant 1$　所张成的凸集。作了这样变换之后，支付变成如下双线性形式：

$$E(r,s)=\frac{4}{3}s_1(r_2-3r_1)+s_2(r_1+r_2-1)+\frac{1}{3}(5r_1-3r_2)$$
$$=r_1(s_2-4s_1+\frac{5}{3})+r_2(s_2+\frac{4}{3}s_1-1)-s_2$$

现在把域 R 及 S 的图形画在图 4.5.1 中，其中 R 是由圆弧

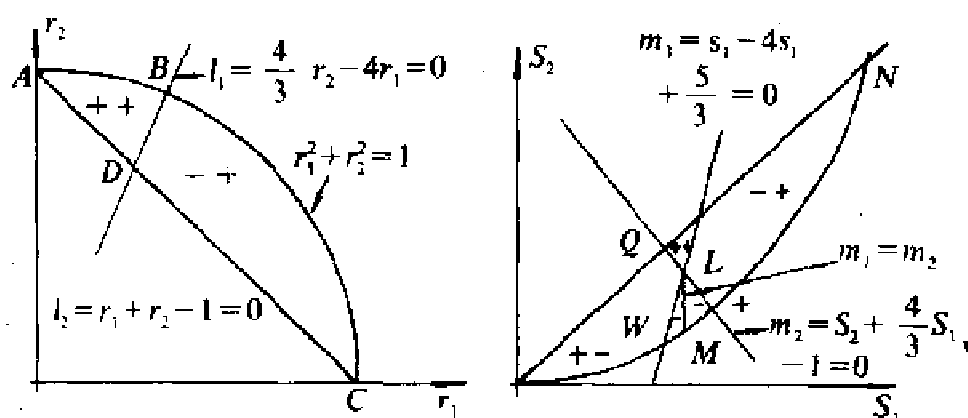


图 4.5.1

ABC 及直线 ADC 所围成，直线 BD 即 $l_1=\frac{4}{3}r_2-4r_1=0$ 把 R 划分成三个区域：DAB，在其中 $l_1>0$，直线 BD，在其上 $l_1=0$，以及区域 BCD，在其中 $l_1<0$，而凸集 S 是由抛物线弧 OMN 及直线 OQN 所围成，而直线 VW，也即 $m_1=s_2-4s_1+\frac{5}{3}=0$，以及直线 QT，也即 $m_2=S_2+\frac{4}{3}S_1-1=0$，另外还有直线 LM，也即 $m_1=m_2\leqslant 0$，它们把 S 划分成五个区域，即：

$OQLW$，其中 $m_1\geqslant 0, m_2\leqslant 0$，但不包括 $m_1=m_2=0$；

QVL，其中 $m_1\geqslant 0, m_2\geqslant 0$，但不包括 $m_1=m_2=0$；

$LVNT$，其中 $m_1\leqslant 0, m_2\geqslant 0$，但不包括 $m_1=m_2=0$；

WLT，其中 $m_1\leqslant 0, m_2\leqslant 0$，但不包括 $m_1=m_2$；

LM，其中 $m_1=m_2\leqslant 0$.

现在对于 ABD 的每一点 r^0，$E(r^0,S)$ 的极小假设在 $s_1=s_2=0$ 处取得，然而对于点 $s^0=(0,0)=0$，$E(r_1,0)$ 的极大可假设在 $r=(1,0)$ 处取得，但它却对应于 R 空间中的 C 点，而此点在 ABD 之外，这样，在 ABD 中不会有哪一点成为甲的优策略。再考虑 S 空间中的 $LVNT$，对此区域中的点 s^0，可假设 $E(r,s^0)$ 在 $r_2=1$ 处取极大，也即在 R 空间中的点 A 处，此点位于域 ABD 中，但域 ABD

映射为 S 空间中域 $OQLW$ 中的点 $s=0$，而不是域 $LVNT$，所以 $LVNT$ 中没有哪一点能作为乙的优策略。不断使用上述域的映射方法，可推知：在 R 空间，ABD 中的每一点映射为 S 空间中的点 O；BCD 中每一点映射为 S 中弧 $\overline{OWMN}$ 中的某点；点 D 映射为 S 空间中的每一点。而在 S 空间中，$OQLW$ 中每一点映射为 R 空间中的 C 点；QVL 中每一点映射为 R 中的 ABC 中的某个点；$LVNT$ 中每一点映射为 R 中的点 A；WLT 中每一点映射为 R 中的点 A 或 C；LM 中每一点映射为 R 中 ADC 上的一点，于是求对策的解，也即寻找不动点，实际上是把两类映射组合起来。为书写简单计，用"→"表示"映射到…中"，于是可将上述诸映射组合如下：

$OQLW$ 中每一点→C→N；

OVL 中每一点→ABC 中某点→O，或 $OWMN$；

$LVNT$ 中每一点→A→O；

WLT 中每一点→A 或 C→O 或 N；

LM 中每一点→弦 $ADC(=AD+DC+D)$ 中每一点→O,N,S

比较以上诸映射，可见有一条映射能产生不动点，此即 $LM\to D\to LM$，由此推出甲、乙的优策略，即

甲：取 D，对应于 $r_1=\frac{1}{4},r_2=\frac{3}{4}$；

乙：取 LM，对应于 $s_1=\frac{1}{2},s_2\leqslant\frac{1}{3}$。

而对策值 $v=\frac{1}{3}$，甲、乙的策略也可用累积分布函数表示，即：

$$\begin{cases} F^*(x)=\frac{3}{4}I_0(x)+\frac{1}{4}I_1(x)+\frac{1}{2t}I_t(y),0<t\leqslant\frac{2}{3} \\ G^*(y)=(1-\frac{1}{2t})I_0(y) \end{cases}$$

这表明甲有唯一的阶跃函数解，而此时乙却有无限多个阶跃函数解。

下面介绍另一种可离型对策——多项式对策(Polynomial Game),它的支付函数呈以下形式:

$$M(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{ij}x^i y^j \tag{4.5.16}$$

这是一种特殊的可离对策,通过引进"矩",可把多项式对策转换成在凸集上的双线性对策,这种凸集通常称为矩空间(Moment Space)。经过转换的对策可以用不动点方法及其他方法求解。下面通过例子加以说明,有关理论请读者参阅文献。

例 2 设多项式对策 Γ 的支付为:

$$M(x,y)=21x+18x^2-24x^3-16y-36xy-9x^2y$$
$$+18x^3y+60y^2-36y^3.$$

其中 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$,试讨论之。

解 设 $F(x)$ 及 $G(y)$ 分别是甲、乙的混合策略。现定义如下的矩:

$$\begin{cases} f_i=\int_0^1 x^i \mathrm{d}F(x), & i=1,2,3 \\ g_j=\int_0^1 y^j \mathrm{d}G(y), & j=1,2,3 \end{cases} \tag{4.5.17}$$

甲选取混合策略等价于选取点 $f=(f_1,f_2,f_3)\in R$,这里 R 是由曲线 $C: r_i=x^i, i=1,2,3, 0\leqslant x\leqslant 1$ 所张成的凸包。类似地,乙的混合策略 $G(y)$ 是选取点 $g=(g_1,g_2,g_3)\in S$,这里 S 是由曲线 $D: s_j=y^j, j=1,2,3, 0\leqslant y\leqslant 1$ 所张成的凸包。采用凸集 R 及 S 的点的记号,支付可写成如下的双线型:

$$M(f,g)=21f_1+18f_2-24f_3-16g_1-36f_1g_1$$
$$-9f_2g_1+18f_3g_1+60g_2-36g_3$$

凸集 R 为三维的,它的边界由曲线 C 为框架构成的。具体说它们由 $(0,0,0)$ 出发向曲线 C 上的点联成直线,以及由点 $(1,1,1)$ 出发向曲线 C 上的点联成诸直线,这些直线族便形成 R 的边界。类似地可描述 S 及其边界。此时甲、乙分别在 R,S 中选择策略。为讨论

方便计，把 M 重新改写如下：

$$M(f,g)=-16g_1+60g_2-36g_3+3f_1(7-12g_1)+9f_2(2-g_1)+6f_3(-4+3g_1)$$

在凸集上的线性型的极大值是在凸集的边界上取得，所以对乙所选取的任何点(g_1,g_2,g_3)，甲为求出 $M(f,g)$的极大值，可在 C 上或在由$(0,0,0)$到 C 的诸直线中，或在由$(1,1,1)$到 C 的诸直线中选择。我们将分别就此三种情况进行讨论。

为使甲选取由 $(0,0,0)$ 到 C 上某点的某直线，此时必须有 $M(o,g)=M(f^0,g)$，这里 f^0 在 C 上，或 $f^0=(x,x^2,x^3)$ ，同时也必需满足

$$\frac{\mathrm{d}M(f^0,g)}{\mathrm{d}x}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}^2M(f^0,g)}{\mathrm{d}x^2}\leqslant 0.$$

而由 $M(0,g)=M(f^0,g)$及$\dfrac{dM(f^0,g)}{\mathrm{d}x}=0$，可推出：

$$3x(7-12g_1)+9x^2(2-g_1)+6x^3(-4+3g_1)=0.$$

$$3(7-12g_1)+18x(2-g_1)+18x^2(-4+3g_1)=0.$$

解上述方程，可得 $x=\frac{1}{2}$，$g_1=\frac{2}{3}$，这些值满足极大值条件。所以选取混合策略使 $g_1=\frac{2}{3}$，则甲可通过沿着连接$(0,0,0)$到点$(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8})$的直线上的点而使 $M(f,g)$达到极大。由此，若乙选取 $g_1>\frac{2}{3}$，则甲将在 R 中选取$(0,0,0)$，而当 $g_1<\frac{2}{3}$，甲将在 R 中选择点(x,x^2,x^3)，它应满足方程

$$\frac{\mathrm{d}M(f,g)}{\mathrm{d}x}=3(7-12g_1)+18x(2-g_1)+18x^2(-4+3g_1)=0$$

或 $$x=\frac{-3(2-g_1)-\sqrt{3(75g_1^2-150g_1+68)}}{6(3g_1-4)}$$

下面再来分析空间 R，在凸集上的线性型的极小应在凸集的边界上取得。所以对甲选择的任何点(f_1,f_2,f_3)，$M(f,g)$的极小

值应假设或在 D 上，或在由(0,0,0)到 D 上的点的直线上，或在由(1,1,1)到 D 上的点的直线上(这些直线都位于空间 S 中)。此时把支付再改写作如下形式：

$$M(f,g)=21f_1+18f_2-24f_3$$
$$+g_1(-16-36f_1-9f_2+18f_3)+60g_2-36g_3$$

可证 g_1 的系数满足不等式：

$$-43\leqslant-16-36f_1-9f_2+18f_3\leqslant-16$$

若支付函数 $M(f,g)$ 在 S 中由点(1,1,1)到曲线 D 上的点的联线的点上取极小值，就应满足三个条件：

$$M(f,1)=M(f,g^0)$$

其中 g^0 是在 D 上，或 $g^0=(y,y^2,y^3)$，还有

$$\frac{\mathrm{d}M(f,g^0)}{dy}=0$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}^2M(f,g^0)}{\mathrm{d}y^2}\geqslant 0$$

由前两个条件可推出如下两个方程：

$$(-16-36f_1-9f_2+18f_3)+60-36$$
$$=y(-16-36f_1-9f_2+18f_3)+60y^2-36y^3,$$
$$(-16-36f_1-9f_2+18f_3)+120y-108y^2=0$$

解之可得：

$$-16-36f_1-9f_2+18f_3=-28 \text{ 及 } y=\frac{1}{3}$$

这些值满足取极小的条件。所以对于 R 中满足方程 $-16-36f_1-9f_2+18f_3=-28$ 的一切点，$M(f,g)$ 的极小值在连接(1,1,1)到(1/3,1/9,1/27)的直线的点上取到。由此推出对 R 中满足 $-16-36f_1-9f_2+18f_3<-28$ 的一切点，$M(f,g)$ 的极小点在 S 的(1,1,1)点处取得。并且对 R 中满足 $-16-36f_1-9f_2+18f_3>-28$

的一切点，$M(f,g)$的极小点可假设在 S 上的某点(y,y^2,y^3)处取得，而此点满足：

$$\frac{dM(f,g)}{dy}=-16-36f_1-9f_2+18f_3+120y-108y^2=0$$

或 $$y=\frac{10-\sqrt{100+3(-16-36f_1-9f_2+18f_3)}}{18}$$

现把有关结果列于下表：

R—空间

R 中的点满足条件	映射于 S 中的点（在 $M(f,g)$位于 S 的极小值处）
$l_1=-16-36f_1-9f_2+18f_3<-28$	$(1,1,1)$
$l_1>-28$	$y=\frac{10-\sqrt{100-3l_1}}{18}$
$l_1=-28$	$\beta(\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27})+(1-\beta)(1,1,1)$ 其中 $0\leqslant\beta\leqslant1$

S—空间

S 中的点满足条件	映射于 R 中的点（在 $M(f,g)$位于 R 的极大值处）
$g_1>\frac{2}{3}$	$(0,0,0)$
$g_1<\frac{2}{3}$	$X=\frac{-3(2-g_1)-\sqrt{3(75g_1^2-150g_1+68)}}{6(3g_1-4)}$
$g_1=\frac{2}{3}$	$\alpha(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8})+(1-\alpha)(0,0,0)$ $0\leqslant\alpha\leqslant1$

比较表中所列各域，可见不动点只能在 $l_1=-28$ 及 $g_1=\frac{2}{3}$ 中取得（检验过程留给读者）。为此我们来求 α 及 β，依不动点含义，应有

$$\frac{1}{3}\beta + (1-\beta) = g_1 = \frac{2}{3},$$

$$-16 - 36(\frac{\alpha}{2}) - 9(\frac{\alpha}{4}) + 18(\frac{\alpha}{8}) = l_2 = -28$$

解之得：$\alpha=\frac{2}{3}$，$\beta=\frac{1}{2}$，从而不动点便是：$(1/3,1/6,1/12)\in R$ 及 $(2/3,5/9,14/27)\in S$，这便是对策的解。此解也可表作：

$$\begin{cases} F^*(x) = \frac{1}{3}I_0(x) + \frac{2}{3}I_{\frac{1}{2}}(x) \\ G^*(y) = \frac{1}{2}I_{\frac{1}{3}}(y) + \frac{1}{2}I_1(y) \end{cases}$$

对策值 v 为：

$$v = \int_0^1\int_0^1 M(x,y)dF^*(x)dG^*(y) = 6$$

参 考 文 献

[1] Karlin S. Mathematical methods and Theory in Games. Programming and Economics (Ⅱ). Pergamon Press, 1959

[2] Vorob'ev N N. Game Theory. Springer-New York; Verlay, 1977

[3] Owen G. Game Theory. 2nd ed. Academic New York Press, 1982

[4] Szep J, Forgo F. Introduction to the Theory of Games. D. Reidel Publishing company ,1985.

[5] Dresher M, Shapley L S. Tucker A W. Advances in Game Theory. Princeton; Princeton Univ press, 1964

[6] Melvin Dresher. The Mathematics of Games of Strategy. Theory and Applications. New York; Dover publications Inc, 1981

[7] Blackwell David, Girshick M A. Theory of Games and Statistical Decision. John New York wiley and sons Inc, 1954

第五章　重复对策

§1　问题和例子

在对策理论中有一类对策模型，常使局中人在选取策略时产生困惑，到底应选何策略更好？这通常出现在两难对策中。例如在支付为如下双矩阵：

$$\begin{pmatrix} (5,5) & (0,10) \\ (10,0) & (1,1) \end{pmatrix}$$

的对策中，局中人甲、乙各有两个策略，但如何正确选择是颇费心思的。当然双方可以重复此对策多次之后得到一些教训，并采取他们认为正确的措施。

这类问题在社会科学、经济活动、军事活动中都会遇到。这类活动中局中人双方事实上对于其对手准备采取何种行动的信息并不了解，虽然我们可以通过反复实验来了解可能的变化，但从理论上讲却提出"重复对策"(Repeated game)这个课题。下面通过一些例子进行必要的说明。

例 1　考虑两人零和对策，设它是多阶段的。在 0 阶段有一个"机会着"，使对策在不同的支付矩阵中选择。设它以概率$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$在 $k\in\{1,2\}$中选择，这里 k 是支付矩阵 A^k 类型的标号。选择的结果告知甲（追求最大效益者），而乙仅知道概率的初始分布，却不知

选择的结果。而在第 m 阶段，$m=1,2,\cdots$，甲选取其第 i_m 纯策略，乙选取其第 j_m 纯策略，此时形成局势 (i_m,j_m)，这种选择当然为双方知晓。再设支付是依下面方式计算：在 n 阶段后，甲由乙处所得的总量为 $\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}a^k_{i_m j_m}$，这里 a^k_{ij} 是支付矩阵 A^k 的第 (i,j) 元素。

若设支付矩阵 A^k 为：

$$A^1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad A^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

并把进行了 n 阶段的对策记作 G_n，相应的值记作 v_n.

先考察 G_1. 由于甲了解 k 的选择，故当 $k=1$ 时甲取 $i_1=\alpha_1$，而当 $k=2$ 时甲取 $i_1=\alpha_2$，这里 α_1,α_2 分别为甲的第一及第二个纯策略，而乙只了解选择概率为 $\frac{1}{2}$. 乙希望甲的收入不超过 $\frac{1}{2}$，并且易见 $v_1\leqslant 1$. 对策在此基础上进行。在 G_2 中，其第一阶段也重复上面过程，而乙分析到这一点便可由 k 的选择所引出的甲的选择来推断 A^k 的类型，然后乙作出自己的选择。此时策略以及机会的选择便已完全暴露，无保密可言，此种情况称为“完全暴露”(completely revealing，简记作 CR)。显然，当乙推断出 k 的选择后，当 $k=1$ 时乙选取 $j_1=\beta_2$，而当 $k=2$ 时乙选取 $j_1=\beta_1$ 这里 β_1,β_2 分别为乙的第一及第二个纯策略，此时的支付 $a^1_{12}=0,a^2_{21}=0$，如此等等，可以推知在 G_n 中当 $n\to\infty$ 时支付也是零。

再考虑另一种情况：甲并不管 k 的选取，而作出自己的抉择，这样当然不会泄露任何信息给乙，称此情况为“未暴露”(Non realing，简记作 NR)，此时的支付是什么呢？由于所给的选择 k 的概率，可推知在第一阶段的对策应为：$D=\frac{1}{2}A^1+\frac{1}{2}A^2$，也即

$$D=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

对此对策，$v_1=\frac{1}{4}$. 故当 $n>2$ 时如甲不使用关于 k 的选择的信息而采用 NR，在 G_n 中他的收益会超过在 G_1 中使用 CR 的收益。可以猜想 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=\frac{1}{4}$，故渐近地看，甲的所得不会超过他使用 NR 时的收益（所得）。

例 2　将上例中的矩阵改换作：

$$A^1=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

关于 k 的选择的概率仍为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，易见对甲来说，使用 CR 为最优，这是因为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} v_n=0$，甲的所得在 G_n 中当然不会超过 0，而在使用 NR 时，由于

$$D=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

它的对策值为 $-\frac{1}{4}$. 由此可见在此例中甲应利用所获得的关于 k 的选择的信息。

例 1 中甲不利用信息，例 2 中甲应该利用信息，那么有无甲应该部分利用信息的例子呢？

例 3　若支付矩阵为：

$$A^1=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}, A^2=\begin{pmatrix}0 & 4 & -2\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

而关于 k 的选择的概率仍为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。由此可见若甲使用 CR，由于每一矩阵的值为零，故甲的极限支付为 0. 若甲使用 NR，此时

$$D=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

而这个对策之值也是零，所以甲的支付为 0，然而甲却可以得到超

过 0 的支付。实际上可证对一切 n，有 $v_n \geq 1$. 为此只须构造甲的一个策略，使之保证在每个阶段，甲的期望支付为 1. 不妨设想有两枚硬币，设其质量分布不甚均匀，并加编号，且规定正、反面。并设它们出现正、反面的概率分别为$(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$，$(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$，现考虑甲的下述策略：先记 $p^1=(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$，$p^2=(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$，第一步选择 $k\in\{1,2\}$，当出现 k 时便掷第 k 枚硬币，得出相应概率 P^k. 若出现正面便总取 $i=\alpha_1$，出现反面便总取 $i=\alpha_2$，此时乙所得到的信息是硬币投掷后出现的是正面或反面，但乙并不知道投掷的是那一枚硬币。现在计算有关硬币结果下关于 k 的后验概率：

$$\text{Prob}(k=1\mid \text{正面})=\frac{3}{4},\qquad \text{Prob}(k=1\mid \text{反面})=\frac{1}{4}$$

所以关于正面的条件期望支付(向量)为：

$$\frac{3}{4}(4,0,2)+\frac{1}{4}(0,4,-2)=(3,1,1)$$

类似地，关于反面的情形为：

$$\frac{1}{4}(4,0,-2)+\frac{3}{4}(0,4,2)=(1,3,1)$$

所以在每一种情形下不论乙如何选择策略，甲的所得至少为 1. 而事实上以矩阵

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

为支付的矩阵对策，对策值 $v=1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=1$.

在上面这些例子中已引入一种渐近的思想来计算对策重复多次之后的渐近值。因此自然会想到定义一个对策 G_∞——无限多次重复对策，并定义 G_∞的支付，可设想它为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}g_m$$

其中 g_m 是阶段为 m 时的支付。不过这不能保证上述极限一定存

在，不妨看下面的例子。

例 4　设支付为：

$$A^1 = (0,1), A^2 = (1,0)$$

选取 k 的概率为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$k=1,2$. 甲知道 k 的选择，不过他只有一个策略，而乙仅知道概率的分布，此时乙应如何选取策略？现用 τ 记乙的如下策略。在其中的 l_1 个阶段中乙采取 $j=\beta_1$ 而在其中的 l_2 个阶段中采取 $j=\beta_2$，在接踵而来的 l_3 个阶段中取 $j=\beta_1$，…如此等等，这里假设 $l_n=2^{n^2}$，于是支付的 lim inf 的期望为 0，而 lim sup 的期望是 $\frac{1}{2}$. 这说明极限不存在。

正由于上面所指出的情况为我们带来困难，所以应另外引进新的方法和定义。

现设 I 和 J 分别为甲与乙在一个阶段的对策中的有限个纯策略的集。再设用 $h_{\text{I}}(n)$（相应的 $h_{\text{II}}(n)$）表示在第 $(n-1)$ 阶段之后描述甲（相应的乙）的信息的（随机）变量，这里 $h_{\text{I}}(n)$（相应的 $h_{\text{II}}(n)$）是在某个集 $H_{\text{I}}(n)$（相应的 $h_{\text{II}}(n)$）中的元素。这里 H_{I}，H_{II} 和信息有关，其含义见后面例子。甲在 G_∞ 中的一个（混合）策略可用下面的序列 $\sigma=(s_1,s_2,\cdots,s_n,\cdots)$ 给出，这里 s_n 是由 $H_{\text{I}}(n)$ 到 I 上的概率集中的函数。类似地，关于乙可定义其（混合）策略 $\tau=(t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots)$。此时设

$$r_n(\sigma,\tau) = E(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} g_m(s_m,t_m)) \tag{5.1.1}$$

称它为重复对策直到 n 阶段时的平均支付，这里 $E(\cdots)$ 表示 $(\cdots)$ 的期望，此时引入以下的定义：

定义 5.1.1　对于无限重复对策 G_∞，若有值 v_∞ 使得对任何 $\varepsilon>0$，存在甲的策略 σ 及乙的策略 τ，而有

$$\begin{cases}\limsup \gamma_n(\sigma,\tau) \leqslant v_\infty + \varepsilon, & \forall\ \sigma \\ \liminf \gamma_n(\sigma,\tau) \geqslant v_\infty - \varepsilon, & \forall\ \tau\end{cases} \tag{5.1.2}$$

均成立，则称 v_∞ 为无限重复对策 G_∞ 的值。

例 5 设有重复对策，其概率选择、支付与信息如下：

$$A^1=\begin{pmatrix}0 & 8\\ 0 & 8\end{pmatrix},\qquad H^1=\begin{pmatrix}a & a\\ b & c\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 8 & 0\end{pmatrix},\qquad H^2=\begin{pmatrix}a & a\\ d & c\end{pmatrix}$$

并设对策进行的过程为：在 0 阶段，有一个机会着以概率 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 选择 $k\in\{1,2\}$，局中人双方都知道此概率分布，但局中人均不了解所选择的 k 之结果。在第 m 阶段，$m=1,2,\cdots$ 甲选取 $i_m\in\{\alpha_1,\alpha_2\}$，乙选取 $j_m\in\{\beta_1,\beta_2\}$，然后有一机构能将 $h^k_{i_m j_m}$ 告诉局中人双方。此外再设局中人都记得他做过的行动——策略，并且记得直到该阶段时所获得的信息。设用 G_n 记 n 阶段时的对策，并设此时甲的支付（即由乙处所得到的）为 $\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n}a^k_{i_m j_m}$，并设 G_∞ 为无限阶段的对策。上面所列的 H^k 称为信息矩阵(information matrix)，它的功能是给局中人提供信息，包括他的对手采取的策略以及"机会"步，具体说在本例中，若 a 出现乙得知甲采取 $i=\alpha_1$，且甲未得到新的信息；若 C 出现，双方都知道其对手先前的一步行动；若 b 或 d 出现，双方都知道机会着的选择。并注意此时的支付为零，这是因为对一切 k，A^k 之值为 0.

对于此例可证 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n$ 及 v_∞ 均存在，并且有 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=v_\infty=4$. 事实上，若设 σ_0 为甲的如下策略：即他总是采用 $i=\alpha_1$，于是对于一切 τ，有 $r_n(\sigma_0,\tau)=4$. 再设 τ_0 为乙的如下策略：即未得知 d 出现以前乙一直采用 $j=\beta_1$，而在得知 d 之后便由该阶段起采用 $j=\beta_2$，显然这个策略能使得对一切 σ 及一切 n，有 $r_n(\sigma,\tau_0)\leqslant 4$. 所以推知 $\forall\, n$，有 $v_n=4$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=4$。并且 σ_0 及 τ_0 保证了 v_∞ 的存在，且 $v_\infty=4$。

例 6　考虑如下对策：$k\in\{1,2,3\}$，概率相应为$(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2})$，支付及信息矩阵如下：

$$A^1=\begin{pmatrix}0 & 8\\0 & 8\end{pmatrix},\qquad H^1=\begin{pmatrix}a & a\\b & c\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}8 & 0\\8 & 0\end{pmatrix},\qquad H^2=\begin{pmatrix}a & a\\d & c\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}0 & -4\\0 & 0\end{pmatrix},\qquad H^3=\begin{pmatrix}a & a\\e & f\end{pmatrix}$$

对策的进行规则同例 5，a,b,c,d 解释同例 5，e,f 解释仿上。

对这个对策可证对一切 n，$1\leqslant v_n\leqslant 1+\frac{1}{n}$. 事实上，设 τ_0 为乙的如下策略：当仅看到 a 时一直按$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$来选取他的两个策略，而当 b 出现时在 A^1 中取最优，即在余下诸阶段总取 $j=\beta_1$，若 d 出现则在 A^2 中取最优，也即总在以后的诸阶段取 $j=\beta_2$ 若 e 或 f 出现则在 A^3 中总取 $j=\beta_2$. 若 c 出现可仿例 5 取对策的最优策略(事实上此时双方都知道是 $k\in\{1,2\}$，且其概率为$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$).

设 σ 是甲的一个策略，现计算在阶段 n 时诸字母出现条件下的支付。若仅出现 a，支付为$\frac{1}{4}\times 4+\frac{1}{4}\times 4+\frac{1}{2}\times(-2)\times x_n$，这里 x_n 是依照 σ，并考虑到 n 阶段的历史，并在 n 阶段采用 $i=\alpha_1$ 的概率。现在 $1-x_n$ 是出现一个异于 a 的字母的概率。b 或 d 的概率为$(1-x_n)\times\frac{1}{8}$，c,e,f 的概率为$(1-x_n)\times\frac{1}{4}$，若 b,d,e 或 f 出现，在其以后的诸阶段的支付将是零，而若 c 出现，由此阶段起支付将是4(见例 5)。于是

$$n\gamma_n=\sum_{m=1}^{n}(2-x_m)\prod_{k=0}^{m-1}x_k+\sum_{m=1}^{n}(n-m)\prod_{k=0}^{m-1}x_k(1-x_m),$$

这里 $x_0=1$，所以 $n\gamma_n=n+1-\prod_{k=0}^{n}x_k$，为了要证明 $v_n\geqslant 1$，我们使用

min max 定理。这时假设甲知道乙的策略，于是在 $m-1$ 阶段之后，甲知道乙在 m 阶段将采用 $j=\beta_1$ 的概率 y_m，并且知道过去的历史。现在考虑甲的如下策略 σ_0：只要一直出现 a，便在 m 阶段采取如下措施：

$$\begin{cases} i=\alpha_1, & 若\ y_m \geqslant \frac{1}{2}; \\ i=\alpha_2, & 其他情形。\end{cases}$$

但若在 m 阶段首先出现异于 a 的字母，则在以后的诸对策中选用相应的优策略。

现在计算 m 阶段的支付。如果在此之前仅看到 a 出现，并且 $y_m \geqslant \frac{1}{2}$，此时支付为 $\frac{1}{4}\times 8\times(1-y_m)+\frac{1}{4}\times 8y_m-\frac{1}{2}\times 4(1-y_m)$。而在仅有 a 出现但 $y_m<\frac{1}{2}$ 时，支付为 $\frac{1}{4}\times 8(1-y_m)+\frac{1}{4}\times 8y_m$，而其他字母出现的概率为

$$\mathrm{Prob}(b)=\frac{y_m}{4}; \qquad \mathrm{Prob}(c)=\frac{(1-y_m)}{2};$$

$$\mathrm{Prob}(d)=\frac{y_m}{4}; \qquad \mathrm{Prob}(e)=\frac{y_m}{2};$$

$$\mathrm{Prob}(f)=\frac{(1-y_m)}{2}.$$

于是有以下结果：若对一切 m 均有 $y_m \geqslant \frac{1}{2}$，则

$$\gamma_n(\sigma_0,\tau)\geqslant \frac{2}{n}\sum_{m=1}^{n} y_m \geqslant 1.$$

否则，设 m_0 为首先使 $y_m<\frac{1}{2}$ 的 m，则

$$n\gamma_n(\sigma_0,\tau)=2\sum_{m=1}^{m_0-1} y_m+2+\frac{(1-y_{m_0})}{2}\times 4(n-m_0),$$

但不论哪种情形，都有 $\gamma_n(\sigma_0,\tau)\geqslant 1$，故推论成立。由此推论出：(1) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=1$；(2)在 G_∞ 中存在乙的一个策略 τ_0，使对甲的一切 σ，有

lim sup $\gamma_n(\sigma,\tau_0)\leqslant 1$；(3)对于乙在 G_∞ 中的策略 τ，存在 $\sigma_0(\tau)$ 使得 lim inf $\gamma_n(\sigma_0(\tau),t)\geqslant 1$。(2)，(3)表明 G_∞ 的 min max 值是 1。

还可证明对于甲在 G_∞ 中的任何策略 σ，以及对一切 $\epsilon>0$，存在 $\tau=\tau(\sigma,\epsilon)$ 使得 lim sup$\gamma_n(\sigma,\tau)<\epsilon$，其证明如下。设 σ 为甲的一个策略，现定义：

$q_n=Prob\{i=1|$直到阶段 n，仅有 a 出现$\}$，并设 $\rho=\prod_{n=1}^{\infty}q_m$，这时分以下情形：

(1)若 $\rho=0$，此时考虑乙的策略 τ：当仅有 a 出现时采用 $j=\beta_1$ 而当其他字母出现时应立即在所对应的对策中采取优策略。假如采取了上述的 σ 与 τ，于是机会着便立即暴露(也即 b,d 或 e 的出现)的概率为：

$$1-Prob_{\sigma,\tau}(\text{仅 } a \text{ 出现})=1-\prod_{n=1}^{\infty}q_n=1.$$

于是对充分大的 m，按阶段进行平均的支付为零的概率为 1. 这就推出 lim sup$\gamma_n(\sigma,\tau)=0$。

(2)若 $\rho>0$，对任何 $\epsilon>0$，选取自然数 M 使 $1-\prod_{n=m+1}^{\infty}q_n<\frac{\epsilon}{4}$. 针对 σ，乙可考虑如下的策略：一开始采用 $j=\beta_1$，若在某阶段 $m\leqslant M$. 出现一个异于 a 的字母，立即在所显露的对策中采取优策略。否则，从 $M+1$ 阶段起采取 $j=\beta_2$. 直到阶段 M 任何异于 a 的信息都将给出一个渐近的支付值 0. 现在在阶段 M 之后首次出现异于 a 的字母的概率最多是

$$\prod_{n=1}^{M}q_n(1-\prod_{n=M+1}^{\infty}q_n)<\frac{\epsilon}{4}$$

最后，若仅有 a 出现，在 M 后的(期望)支付将是零。所以，对于任何 $n>M$，将得到 $\gamma_n(\sigma,\tau)<\frac{2M}{n}+\frac{2\epsilon}{4}$，于是对 $n>\frac{4M}{\epsilon}$，可推出 $\gamma_n(\sigma,\tau)<\epsilon$，所说推断成立。

由此还可推出即使 $\lim v_n$ 存在，v_∞ 也不存在。此结论说明在 G_∞ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} G_n$ 之中存在显然的区别。在第一个对策中只要 n 是有限的，局中人可以负担起在 n 个阶段中的损失，即使 n 较大也不要紧。所以在 G_∞ 中的"优"策略，当把它限制在 G_n 中时，即使 n 充分大，此策略也未必是最优的。

上述诸例所揭露的问题以及所提出的概念是以后各节研究的对象。

§2 一边缺少信息的对策

首先给出所讨论的模型。设 $A^k, k\in k=\{1,2,\cdots,L\}$ 为具有 $\{I\}$ 行、$\{J\}$ 列的对应于零和对策的支付矩阵的有限(个矩阵的)集。这些矩阵的元素记作 a_{ij}^k，其中 $i\in I=\{1,2,\cdots,|I|\}$，$j\in J=\{1,2,\cdots,|J|\}$ 为局中人的诸纯策略的标号。再设 P 为 R^l 中的单纯形，即

$$P=\{p=(p^1,p^2,\cdots,p^k,\cdots,p^L)\mid p^k\geqslant 0,\forall\ k,\sum_k p^k=1\}$$

(5.2.1)

现考虑如下定义的 n 阶段重复对策，记作 $G_n(p)$：

在 0 阶段，依照概率 p 来选择 k，此即机会着。局中人双方都知道所使用的选择概率 p，但只有甲(追求支付为极大者)了解 k 的选取结果。 在 1 阶段，甲选取 $i_1\in I$，乙选取 $j_1\in J$，并且双方均知道选取 (i_1,j_1) 的结果(换言之，(i_1,j_1) 是双方共同的信息知识)。一般言之，在第 m 阶段，设大家都了解过去的历史，即已作出的选择 $(i_1,j_1,\cdots,\cdots i_{m-1}j_{m-1})$，此时甲选取 $i_m\in I$，乙选取 $j_m\in J$，并将 (i_m,j_m) 告知双方。在第 n 阶段，甲由乙处所得规定为 $\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n}a_{i_m j_m}^k$，这

且采取“平均”是为了便于对不同的 n，可对支付加以比较，另外用 $G_\infty(p)$ 表示无限重复对策。显然对任何给定的 n 及 p，$G_n(P)$ 为给定的零和矩阵对策，根据 min max 定理，可知 $G_n(P)$ 有一个值，记此值为 $v_n(P)$。

注意在每一个零和对策中，信息的值设为正的。事实上若 G 是初始对策。而 G' 是另一个对策，在 G' 中甲可以得到某种补充（或附加）信息，除此以外均与 G 相同，则甲由 G' 中的所得将会超过在 G 中所得，这是因为甲关于 G' 的策略集可能“大于”甲在 G 中的策略集，因而能推知 G' 的对策值将超过 G 的对策值，所以设信息的值为正是合理的。

下面讨论 v_n 及 v_∞，但首先讨论 v_n.

命题 1　对一切 n，$v_n(p)$ 在 P 上是凹的。

这是 Aumann 及 Mashler 于 1968 年证明的。事实上，设 p_1，$p_2\in P$，且 $\alpha\in[0,1]$，令 $\alpha p_1+(1-\alpha)p_2=p$，并考虑如下两个对策：$G_n'(\alpha,p_1,p_2)$ 及 $G''(\alpha,p_1,p_2)$，规定在 G_n' 中依照概率 $(\alpha,1-\alpha)$ 来选取 $k\in\{1,2\}$，并设局中人双方均知道选择结果，然后进行对策 $G_n(p_k)$ 的活动。而 G_n'' 仿上类似的定义，但规定只有甲知道 k 的选取，至于对策的其他规则等均是双方共知的。再设 v_n' 及 v_n'' 分别为上述两对策之值，由以上讨论可推知 $v_n'\leqslant v_n''$，但由于甲关于 k 的知识是无用的（尽管已知道 k），而乙可按平均概率 $\alpha p_1+(1-\alpha)p_2=p$ 来考虑 k 的选取，从而推出 G_n'' 与 G_n 有相同的值，也即 $v_n''=v_n$，最后 $G_n'(\alpha,p_1,p_2)$ 之值 $v_n^1(\alpha,p_1,p_2)=\alpha v_n(p_1)+(1-\alpha)v_n(p_2)$，于是推出命题的结论的正确性。

现考察 G_n 中的策略。先记直到 m 阶段的历史为 h_m，它是当 $l<m$ 时的诸策略对 (i_l,j_l) 的序列，这些当然都为双方所知晓，显然 $h_m\in H_m=(I\times J)^{m-1}$，由于 $G_n(p)$ 是一个具有完全记忆的对策，所以我们将仅使用行为策略（Behavior strategy）即可。它们是如下的策略：关于甲，记其策略为 $\sigma_n=(\sigma_n^1,\cdots,\sigma_n^k,\cdots\sigma_n^L)$，而对于每个 $k\in$

$k,\sigma_n^k=(s_1^k,\cdots,s_n^k)$，这里，对一切 m，$1\leqslant m\leqslant n$，s_m^k 是由 H_m 到 I 上的概率集合中的一个函数。我们用 s_m 记 L 一重数组$(s_m^1,\cdots,s_m^k,\cdots s_m^L)$。关于 σ_n 的解释如下：若选取了 k，甲将在第 1 阶段使用 S_1^k，若(i_1,j_1)选定后并通知了双方，甲将在第 2 阶段使用 $s_2^k(i_1,j_1)$，如此等等。乙的一个策略也给出如下：$\tau_n=(t_1,\cdots,t_n)$，这里对一切 m，$1\leqslant m\leqslant n$，t_m 是由 H_m 到 J 上概率集合中的一个函数。

下面再引入递归构造(Recursive structure)。若在 $G_n(p)$中，双方使用 σ_n 与 τ_n，并设直到阶段 m，其历史为 h_m，若 p_m 是在历史为 h_m 条件下在 k 上的条件概率，于是在 $k\times H_m$ 上的概率将由 p，σ_n，τ_n 确定。这些概率 p_m 实际上是对策的状态变量，它意味着 p_m 是后验的。

可以推断如下命题：

命题 2 $v_n(p)$也是下述对策的值，在此对策中，首先进行到 $G_{m-1}(p)$，$1\leqslant m\leqslant n$，双方均把他们的策略告诉公断人，而公断人又将 p_m 选取告知双方，然后他们进行到对策 $G_{n-m+1}(p)$，整个对策的支付是$\frac{1}{n}[(m-1)M_1+(n-m+1)M_2]$，这里 M_1 是 G_{m-1}的支付，M_2 是 G_{n-m+1}中的支付。

此命题实际上是如下两个引理的一个结果：

引理 5.2.1 $v_n(p)$是如下定义的对策 $G_n'(p)$的值：这里设 $G_{m-1}(p)$已进行，其策略为 σ_{m-1}与 τ_{m-1}. 并再构成一个新的抽签事件：k 依照 p 而选取，从而使历史 h_m 是依 p、σ_{m-1}及 τ_{m-1}而选取。将 k 告知甲并将 h_m 告知双方，然后他们进行到此对策的另一个阶段$(n-m+1)$。整个对策的支付为$\frac{1}{n}[(m-1)M_1+(n-m+1)M_2]$，这里 M_1 及 M_2 分别为两个子对策 G_{m-1}及 G_{n-m+1}的支付。

证 此时存在一个由 G_n 的策略集到 G_n' 的策略集中的如下一对一映射：设 σ_n 为甲在 G_n 中的一个策略，则在 G_n' 中对应的 σ_n'，在

第一部分为$(s_1,\cdots,s_{m-1})$，而在第二部分为$(s_m,\cdots,s_n)$。现在再构造一个新的抽签事件，它能使在 G_n 中由 σ_n,τ_n 等对应的(每个阶段的)期望支付与在 G'_n 中由 σ'_n,τ'_n 所确定的期望支付相同，从而只须证如果 σ_n(相应的，τ_n)能保证在 G_n 中的某个支付 M_σ(相应的，M_τ)，则在 G'_n 中 σ'_n(相应的，τ'_n)也能保证 M_σ(相应的，M_τ)，现在假设乙知道 σ'_n，于是他也知道在选取历史 h_m 后关于 k 的条件概率。他在首 $m-1$ 个阶段中所得一切信息现在都是不相干的了。因为第二个子对策是由与此信息无关的新的概率而选取的，于是乙不可能得出比采用由 τ_n 所诱导出来的 τ'_n 的策略所得的更好结果，所以对应的支付将会与 σ_n 及 τ_n 所确定的支付相同，而此支付是超过或等于 M_σ 的，不难看出同样的讨论对于甲也成立，这样便证明了引理。

引理 5.2.2 $v_n(p)$也是如下的对策 $G''_n(p)$的值，其中 $G''_n(p)$为：首先已进行了 $G_{m-1}(p)$，采用的是 σ_{m-1},τ_{m-1}，然后构成一个新的抽签事件：先依照由 $p,\sigma_{m-1},\tau_{m-1}$在 H_m 上诱导出的概率而选择了一个历史，于是依照 p_m 选择了某个 $k\in k$，当将 k 告知甲，将 h_m 告知双方，然后他们进行到该对策的另一个子对策，即第$(n-m+1)$阶段的对策。整个支付仍然是$\frac{1}{n}[(m-1)M_1+(n-m+1)M_2]$，这里 M_1 与 MM_2 分别为两个子对策的支付。

证 在 G'_n 与 G''_n 之间的唯一差别是 k 与 h_m 的选择顺序，而在两种情况下它们的联合概率是相同的。然而这种顺序不会产生影响，这是因为局中人在这两者之间不会作出任何行动，故而有与引理 5.2.1 同样的结论。证毕。

现在回头证明上述命题。引理 5.2.1 及 5.2.2 说明可对 G''_n 应用 minmax 定理。所以我们假设在阶段 m，双方都知道 p_m，显见他们可以忽略 h_m，因为他们只要记住 p_m 即可，现在若在 G''_n 中假设 p_m 是依照由 $p,\sigma_{m-1},\tau_{m-1}$在历史上所诱导出的概率而选取的。将

p_m 告知双方，而 k 是依照 p_m 来选取的，并将结果告知甲，按此做法来观察双方直到 m 阶段的行动，并依照历史 h_m 来宣告 p_n 的选取，这样便可推出本命题。证毕。

此时可得下述定理

定理 5.2.3 $G_n(p)$与下述对策有相同的值，在该对策中在每个阶段 m，后验概率 p_m 均告知双方，且在该阶段的支付是依 p_m 进行计算的。

此定理可由持续应用上述命题而得到证明。

说明　显然在所研究的情形中，τ_m 与 k 无关，p_m 仅涉及 p，σ_{m-1}及 h_m，这里 σ_{m-1}是 σ_n 在首$(m-1)$个阶段上的限制，p_m 也可写成 $p_{m-1}, s_{m-1}(h_{m-1})$及 i_m 的函数。另一方面，总有 $E_m(p_{m+1})=p_m$，这里 E_m 是直到阶段 m 的过去历史条件下的期望。从而当 $p_1=p$ 时 p_m 为一个鞅。

下面建立用于计算 v_n 的递归公式(Recursive formula)

定理 5.2.4 对 P 中的一切 p 及一切 n，有：

$$v_{n+1}(p) = \frac{1}{(n+1)} \max_{s_1}\{\min_{t}\sum_{k=1}^{l} p^k s_1^k A^k t + n\sum_{i\in I}\bar{s}_1(i)v_n(p_i)\} \qquad (5.2.2)$$

其中 $\bar{s}_1=\sum_k p^k s^k$，且对一切 i，使 $\bar{s}_1(i)\neq 0$，p_i^k 是由下式给出的：$p_i^k=p^k s_1^k(i)/\bar{s}_1(i)$，它是在 k 上的概率。

证　设甲在 $G_{n+1}(p)$中的一个策略为 σ_{n+1}而 s_1 是由 σ_{n+1}在第一阶段所诱发的策略，在第一阶段的期望支付至少是 $\min_t \sum_k p^k s_1^k A^k t$，现设 $p_2^k=\text{Prob}_{p,\sigma_{n+1},\tau_{n+1}}(k|h_1)$。在此情况下 p_2 仅与 p, s_1 及 i_1 有关。如果 $i_1=i, p_2=p_i$，那么 $p_i^k=Prob_{p,s_1}(k|i_1=i)$，所以我们得到 $p_i^k=p^k s_1^k(i)/\bar{s}_1(i)$在第一阶段以后利用定理 5.2.3，这时考虑 $G_n(p_i)$，此时相应的概率为 $\bar{s}_n(i)$，并设甲采用他的

优策略后至少可得 $v_n(p_i)$。于是在 S 上取极大，便得到 $v_{n+1} \geqslant \max_{s_1} B(s_1)$，这里

$$B(s_1) = \frac{1}{n+1}\{\min_t \sum_k p^k s_1^k A^k t + n \sum_i \bar{s}_1(i) v_n(p_i)\}$$

然而此时对每一个 σ_{n+1}，乙如果使用他的在 $G_1(p)$ 中关于 s_1 的一个最佳响应（策略）；便可保证支付小于 $B(s_1)$，于是在第一阶段后计算 p_i 并在 $G_m(p_i)$ 中使用优策略，可得结果。从而证明了定理。

定理 5.2.5 对一切 $p \in P$，序列 $v_n(p)$ 是减小的。

证 先证对一切 $p \in P$，$v_2(p) \leqslant v_1(p)$，利用(5.2.2)，可得

$$2v_2 = \max_{s_1}\{\min_t \sum_k p^k s_1^k A^k t + \sum_i s_1(i) v_1(p_i)\}$$

但 v_1 是凹的（见前所讨论的 Aumann 及 Maschler 的命题）。所以推出

$$\sum_i \bar{s}_1(i) v_1(p_i) \leqslant v_1(p),$$

因为 $\sum_i \bar{s}_1(i) = 1$，并且 $\sum_i \bar{s}_1(i) p_1 = p$，现在

$$2v_2 \leqslant \max_{s_1} \min_t \sum_k p^k s_1^k A^k t + v_1(p),$$

而上式右端的项实际上是 $2v_1(p)$。由此知 $v_2(p) \leqslant v_1(p)$，现在假设对一切 p，有 $v_n(p) \leqslant v_{n-1}(p)$ 成立，利用(5.2.2)得到

$$(n+1)v_{n+1}(p) = \max_{s_1}\{\min_t \sum_k p^k s_1^k A^k t + n \sum_i \bar{s}_1(i) v_n(p_i)\}$$

现在把 $(n-1)v_n(p_i)$ 用更大的 $(n-1)v_{n-1}(p_i)$ 来代替，可得：

$$(n+1)v_{n+1}(p) \leqslant \max_{s_1}\{\min_t \sum_k p^k s_1^k A^k t + (n-1)\sum_i \bar{s}_1(i) v_{n-1}(p_i) + \sum_i \bar{s}_1(i) v_n(p_i)\}$$

由于 $v_n(p)$ 是凹的，故有

$$(n+1)v_{n+1}(p) \leqslant \max_{s_1}\{\min_t \sum_k p^k s_1^k A^k t + (n-1)\sum_i \bar{s}_1(i) v_{n-1}(p_i)\} + v_n(p)$$

$$\leqslant nv_n(p) + v_n(p)$$

即 $v_{n+1}(p) \leqslant v_n(p)$。证毕。

定理的直观解释是乙由甲处所得到的信息可以仅由阶段的数目的增加而增加。

以下讨论非暴露策略(Non—revealing Strategy，简记为NRS)，把对策 $D(p)$ 作为对策 $G_1(p)$，在其中甲并不使用他的信息，或换一种说法，甲不把他的信息泄露给乙，这样一来甲的策略便限于与 K 无关的那些策略。即对一切 k，使 $s_1^k = s$，对于这样的 $D(p)$，注意有以下事实：$p_2(k|i) = p^k \dfrac{s_1^k(i)}{s_1(i)}$，且甲不暴露等价于对一切 $k \in k$ 及一切 $i \in I$，有 $p_2(k|i) = p^k$ 成立。

$D(p)$中的支付矩阵实际上是 A^k 的期望，记作 $A(p)$：

$$A(p) = \sum_k p^k A^k.$$

设 $D(p)$的值为 $u(p)$，显然它在 P 上是连续的。

定义 5.2.1 设 $f: P \to R$，现记在 P 上大于或等于 f 的诸凹函数 $g: P \to R$ 中的最小函数为$\underset{p}{\mathrm{Cav}} f$(或简记作($\mathrm{Cav}f$)。类似地，在 P 上小于或等于 f 的诸凸函数中的最大者记作 $\mathrm{Vex}f$.

由此定义 $\mathrm{Cav}f$ 是如下的函数，它的截图是(紧靠 f 的)f 的截图 epif 的凸包。

引理 5.2.6 记号含义同前，则有

$$\frac{1}{n}\sum_k E|p_{m+1}^k - p_m^k| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_k \sqrt{p^k(1-p^k)} \quad (5.2.3)$$

证 由于 p_m 是期望为 p 的鞅，故有

$$E[\sum_{m=1}^{n}(p_{m+1}^k - p_m^k)^2] = E(p_{n+1}^k - p_1^k)^2$$
$$\leqslant p^k(1-p^k) \quad (5.2.4)$$

使用 Cauchy—Schwartz 不等式，可得：

$$E\left[\sum_{m=1}^{n}|p_{m+1}^k-p_m^k|\right]\leqslant E\left[n\sum_{m=1}^{n}(p_{m+1}^k-p_m^k)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

(5.2.5)

由以上两式便推出

$$\frac{1}{n}E\left[\sum_{m=1}^{n}|p_{m+1}^k-p_m^k|\right]\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{p^k(1-p^k)}$$

证毕。

定理 5.2.7 (Aumann、Maschler 对一切 n，在 P 上有 $v_n(p)\geqslant\mathrm{Cav}u(p)$ 成立。

证 设 x 为甲的一个 NR 策略，且为在 $D(p)$ 中的优策略，再设 σ_n 是按以下方式确定的策略：关于一切 $k\in K$ 及一切 $m\leqslant n$，以及 $h_m\in H_m$，令 $s_m^k(h_m)=x$，于是 $\sigma_n^k=(s_1^k,\cdots,s_n^k)$，$\sigma_n=(\sigma_n^1,\cdots,\sigma_n^k,\cdots,\sigma_n^L)$。由于 $p_m=p$ 对一切 m 成立，故在每个阶段 σ_n 均保证值为 $u(p)$。从而 $v_n(p)\geqslant u(p)$。现在 $v_n(p)$ 是凹的，这样便推得结果。

证毕。

此结果还可用另一方法证明。

再考虑 $G_n(p)$ 在 m 阶段的情况。设 $g_m(s_m,t_m)$ 是在此阶段以历史为条件而定的期望支付，则

引理 5.2.8 对乙的一切策略 τ，有

$$|g_m(s_m,t_m)-g_m(\bar{s}_m,t_m)|\leqslant C\sum_k E_m(|p_{m+1}^k-p_m^k|)$$

(5.2.6)

其中 $\bar{s}_m=\sum_k p_m^k s_m^k$，$C=\max_{i,j,k}|a_{ij}^k|$。

证 由定理 5.2.3，可得

$$g_m(s_m,t_m)=\sum_k P_m^k s_m^k A^k t_m=\sum_k P_m^k(s_m^k-\bar{s}_m)A^k t_m+g_m(\bar{s}_m,t_m)$$

(5.2.7)

现设 $\{i_m=i\}$ 及 $\bar{s}_m(i)>0$，在此情形下计算 p_{m+1}，此时

$$p_{m+1}^k(i)=\text{Prob}_{p_m,s_m}(k|i)=\frac{p_m^k s_m^k(i)}{\sum_k p_m^k s_m^k(i)}=\frac{p_m^k s_m^k(i)}{s_m(i)}$$

所以

$$|p_{m+1}^k(i)-p_m^k(i)|=\left|\frac{s_m^k(i)}{s_m(i)}-1\right|p_m^k,$$

于是在"着"(或"步")i_m 上取期望,可得

$$E_m(|p_{m+1}^k-p_m^k|)=\sum_i \bar{s}_m(i)\left|\frac{s_m^k(i)}{s_m(i)}-1\right|p_m^k$$

$$=p_m^k\sum_i|s_m^k(i)-\bar{s}_m(i)| \tag{5.2.8}$$

由(5.2.7),(5.2.8)便推知:

$$|g_m(s_m,t_m)-g_m(\bar{s}_m,t_m)|\leq C\sum_k E_m(|p_{m+1}^k-p_m^k|).$$

证毕。

可利用此引理估计 $G_n(p)$ 中的支付。

定理 5.2.9(Aumann 及 Maschler) 对一切 $p\in P$ 及一切 n,有 $v_n(p)\leqslant \text{Cavu}(p)+o(\frac{1}{\sqrt{n}})$

证 对每个 σ_n,计算在每个阶段在给出乙的策略后的条件期望支付。利用引理 5,2,8,可推出:

$$g_m(s_m,t_m)\leqslant g_m(\bar{s}_m,t_m)+C\sum_k E_m(|p_{m+1}^k-p_m^k|),$$

由于 $\bar{s}_m$ 是 NR,若 t_m 是 $D(p_m)$中的优策略,可得:$g_m(\bar{s}_m,t_m)\leqslant u(p_m)$,所以

$$g_m(s_m,t_m)\leqslant \text{Cavu}(p_m)+C\sum_k E_m(|p_{m+1}^k-p_m^k|)$$

再设 $G_n(p)$的平均期望支付为 $\gamma_n(\sigma_n,\tau_n)$,取诸期望并把诸不等式相加,便推知

$$\gamma_n(\sigma_n,\tau_n)\leqslant \text{Cavu}(p)+\frac{C}{n}\sum_k E[\sum_{m=1}^n(|p_{m+1}^k-p_m^k|)]$$

这是因为使用 Jensen 不等式，知 $E\mathrm{Cav}u(p_m)\leqslant\mathrm{Cav}u(p)$，再利用引理 5.2.6 推知$\forall\ \sigma_n$，$\exists\ \tau_n$ 而使得：

$$\gamma_n(\sigma_n,\tau_n)\leqslant\mathrm{Cav}u(p)+\frac{C}{\sqrt{n}}\sum_k\sqrt{p^k(1-p^k)}\qquad(5.2.9)$$

证毕。

由定理 5,2,7 及定理 5.2.9 立即推出：

定理 5.2.10（Aumann 及 Maschler） 以下几个结论成立：(1)对一切 $p\in P$，序列 $v_n(p)$收敛；(2)对一切 $p\in P$，$\lim v_n(p)=\mathrm{Cav}u(p)$；(3)存在实数 C 使对一切 $p\in P$ 及一切 n，有

$$0\leqslant v_n(p)-\mathrm{Cav}u(p)\leqslant\frac{C}{\sqrt{n}}$$

成立。

证 略。

回忆定理 5.2.9 的证明使我们想到有可能把上面定理中的(3)的估计加以改进，但实际上这不可能，因为可证如下结果：

定理 5.2.11（Zamir） $O(1/\sqrt{n})$是关于 $v_n(p)-\mathrm{Cav}u(p)$的最好的一致上界。

让我们先观察一个例子。设

$$A^1=\begin{pmatrix}3&-1\\-3&1\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix},$$

$$A(p)=\begin{pmatrix}p+2&p-2\\-p-2&-p+2\end{pmatrix}.$$

于是在 P 上 $u(p)=0$，从而在 P 上$\lim\limits_{n\to\infty}v_n(p)=\mathrm{Cav}u(p)$. 下面再计算其 $v_1(p)$，此时支付矩阵可给出如下：

$$\begin{matrix}11\\12\\21\\22\end{matrix}\begin{bmatrix}3p+2p^1&-p-2p^1\\3p-2p^1&-p+2p^1\\-3p+2p^1&p-2p^1\\-3p-2p^1&p+2p^1\end{bmatrix}$$

其中 $p_1=p$，$p'=1-p$，而 ab 表示当 $k=1$ 时取 $i=a$ 而当 $k=2$ 时取 $i=b$. 由此推出 $v_1(p)=\min(p,p')$，现在再证下述引理。

引理 5.2.12 $v_n(p)\geqslant \frac{pp'}{\sqrt{n}}$ (5.2.10)

证 首先简化记号，为此定义

$$s_1^1(1)=q,\qquad s_1^1(2)=q'=1-q.$$

$$s_1^2(1)=r,\qquad s_1^2(2)=r'=1-r.$$

其含义可解释如下，如 r 是当 $k=2$ 时甲在第一阶段采取第一个策略的概率，余类推。由此推出：

$$\bar{s}_1(1)=pq+p'r=\bar{s},\quad \bar{s}_1(2)=pq'+p'r'=\bar{s}',$$

以及

$$p_1^1=Prob(k=1|i_1=1)=\frac{pq}{\bar{s}_1(1)}\xlongequal{\text{def}}p_1$$

$$p_2^1=Prob(k=1|i_1=2)=\frac{pq'}{\bar{s}_1(2)}\xlongequal{\text{def}}p_2$$

现用归纳法来证明此引理。对于 $n=1$，它显然成立。现设当 v_n 时引理成立，下面来计算 v_{n+1}，现设 $pp'\neq 0$（否则，$v_n(p)=v_1(p)=u(p)$）. 利用(5.2.2)，可推知

$$(n+1)v_{n+1}(p)=\max_{\substack{0\leqslant q\leqslant 1\\0\leqslant r\leqslant 1}}\{\min[p(3q-3q')+p'(2r-2r');$$
$$p(-q+q')+p'(-2r+2r')]+n[\bar{s}v_n(p_1)+\bar{s}'v_n(p_2)]\}$$

现在限定 q 及 r 满足 $p(q-q')=p'(r'-r)$，也即 $r=\frac{1}{2}-p(q-q')/2p'=r(q)$，这就给出：

$$(n+1)v_{n+1}(p)\geqslant \max_{\substack{0\leqslant q\leqslant 1\\0\leqslant r(q)\leqslant 1}}\{p(q-q')+\frac{n}{2}[v_n(2pq)+v_n(2pq')]\}$$

故利用归纳法假设有：

$$(n+1)v_{n+1}(p)$$
$$\geqslant \max_{\substack{0\leqslant q\leqslant 1\\0\leqslant r(q)\leqslant 1}}\{p(q-q')+\frac{\sqrt{n}}{2}[(2pq)(2pq)'+(2pq')(2pq')']\}$$

将上式右端诸项尽可能小，推出

$$v_{n+1}(p) \geqslant \frac{pp^1}{\sqrt{n+1}}$$

证毕。

由这个例子可见定理 5.2.11 成立。

现作一点说明。可以这样来理解收敛速度。假设 $u(p)=\text{Cav}\ u(p)$，于是有一稳定的 NR 策略 x 来保证甲的 $u(p)$ 值，这时不论如何把中心极限定理应用于 x 的样本中的随机变差，它的阶为 $1/\sqrt{n}$，现在定理 5,2,11 表明在某些对策中甲可应用这些变差，以便在两种状态中(它们可通过 $c/\sqrt{n}$ 而将支付增大)使用一种作出轻微改变的策略而不必被人察觉。但事实上这通常并非总是如此，因为收敛速度更大的情况也可能发生。

下面再来研究 v_∞，先讨论 G_∞ 中的策略。甲在 G_∞ 中的一个策略可给出如下：$\sigma=(\sigma^1,\cdots,\sigma^k,\cdots,\sigma^L)$，这里对一切 $k\in K$，σ^k 是一个序列 $\{s_n^k;n\geqslant 1\}$，其中每一个 s_n^k 都是一个由 H_n 到 I 上的概率集中的函数(类似于 G_n 中情况)。乙的一个策略可类似的定义为 $\tau=\{t_n;n\geqslant 1\}$，这里 t_n 是由 H_n 到 J 上的概率集中的函数。再设 $\gamma_n(\sigma,\tau)$ 为在 $G_\infty(p)$ 中首 n 个阶段中当执行 σ,τ 时的平均期望支付，即

$$\gamma_n(\sigma,\tau)=E_{p},\sigma,\tau\left(\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}a_{i_m j_m}^{k}\right)$$

在不给出此对策的支付时，我们引入 $G_\infty(p)$ 中的值的概念。

定义 5.2.2 若对一切 $p\in P$，及 $\varepsilon>0$，有 $f(p)$ 使在 $G_\infty(p)$ 上存在甲的一个策略 σ_ε 及 N_ε，使对一切 $n>N_\varepsilon$，保证 $f(p)$ 满足：

$$\gamma_n(\sigma_\varepsilon,\tau)\geqslant f(p)-\varepsilon,\qquad \forall\,\tau \tag{5.2.11}$$

此时说 $G_\infty(p)$ 有一个值 $v_\infty(p)$ 是指如果甲及乙可保证 $f(p)$ 存在，或明确地说，$\forall\ p\in P,\forall\ \varepsilon>0,\exists\,\sigma_\varepsilon,\tau_\varepsilon,N_\varepsilon$ 使得当 $n\geqslant N_\varepsilon$ 时可导致

$$\begin{cases}\gamma_n(\sigma_n,\tau)\geq v_\infty(p)-\varepsilon, & \forall\,\tau\\ \gamma_n(\sigma,\tau_n)\leq v_\infty(p)+\varepsilon, & \forall\,\sigma\end{cases} \tag{5,2,12}$$

引理 5.2.13 若甲可保证 $f(p)$满足(5,2,11),则他也可保证 Cav$f(p)$满足(5.2.11)。

证 由 Caratheodory 定理可知对一切 $\varepsilon>0$,存在 $\lambda_r, p_r, r=1,2,\cdots,L$,其中 $\lambda_r\in[0,1]$,$p_r\in P$ 使得$\sum_r \lambda_r=1$,$\sum_r \lambda_r p_r=p$,并且

$$\mathrm{Cav}f(p)\leqslant \sum_r \lambda_r f(p_r)+\varepsilon/2.$$

设 σ_r 是如下的策略,它可保证在 $G_\infty(p_r)$中 $f(p_r)$最多差为 $\varepsilon/2$. 此时在 $G_\infty(p)$中定义 σ_0 如下:若 k 已选定,对一切 r,以概率 $\lambda_r(p_r^k/p^k)$执行 σ_r. 即甲采取的是依赖于他个人所知的信息而进行的抽签方式,在执行 σ_r 时,其总概率从而是:$\sum_k \mathrm{Prob}(\sigma_k|k)p^k=\sum_k \lambda_r p_r^k=\lambda_r$. 在条件 σ_r 时 k 上的概率为

$$\mathrm{Prob}(k|\sigma_r)=\frac{p^k\lambda_r(p_r^k/p_r)}{\lambda_r}=P_r^k$$

即使现在乙知道此抽签结果,定理 5.2.3 可推出 $G_\infty(p)$等价于以概率 λ_r 执行 $G_\infty(p_r)$的对策,从而对一切 τ,有当 $n\geqslant N=\max_r N_r$ 时推出

$$\gamma_n(\sigma_0,\tau)\geqslant\sum_r \lambda_r\left(f(p_r)-\frac{\varepsilon}{2}\right)\geq \mathrm{Cav}f(p)-\varepsilon.$$

证毕。

定理 5.2.14 对一切 $p\in P$,甲有策略 σ_0 使对一切 n 及一切 τ,有 $\gamma_n(\sigma_0,\tau)\geqslant\mathrm{Cav}u(p)$.

证 由于甲在执行 σ 时可保证 $u(p)$(满足(5.2.11)),这里 σ 是一个在 $G_\infty(p)$中为稳定的策略:对一切 h_m,一切 m,有 $s_m(h_m)=x$,其中 x 为 NR 且在 $D(p)$中为最优,而上面的引理 5.2.13 可推出甲能保证 Cav$u(p)$。

实际上这个结果很强。这是因为$\forall\ p_r$,$\exists\,\sigma_r$ 使得$\forall\ n$,$\forall\ c$,有 $\gamma_n(\sigma_r,\tau)\geqslant u(p_r)$。而且进一步能知道 $u(p)$是一个连续函数,所以当 $\varepsilon=0$ 时可得 Caratheodory 定理中的等式。证毕。

可以注意到为要得到 $\mathrm{Cav}u(p)$，甲使用了一个依赖于抽签方式的类型的策略，并从而执行了 NR 稳定性策略，因而此定理又可给出定理 5.2.7 的另一个证明。

下面描述乙的优策略。考虑如下二人零和对策，它具有向量支付矩阵 $B(b_{ij}\in R^M, i\in I, j\in J)$，对策可以重复无限多次，在每一阶段 m 之后，局中人双方均被告知其支付(向量)$g_m\in R^M$，所以直到这个阶段，其信息总量为$(g_1,\cdots,g_m)=h_{m+1}$. 甲的一个策略是一个序列 $\sigma=\{s_m;m\geq 1\}$，其中 s_m 为一个由 H_m 到 I 上的概率集中的函数。乙的情况类似。

定义 5.2.3 集 $S\subset R^M$ 称为甲的具有 σ_0 时为可追近的(approachable)集是指若对于一切 $\varepsilon>0$，存在 N_0 使对一切 τ，一切 $n\geq N_0$ 有 $E_{\sigma_0,\tau}(d(s,\bar{g}_n))<\varepsilon$，其中 $d(.,.)$ 为 R^M 中的距离，并且 $\bar{g}_n=(\frac{1}{n})\sum_{m=1}^{n}g_m$.

此定义的等价说法是 $d(s,\bar{g}_n)$依概率收敛于零。

当乙具有策略 τ_0 时集 S 称为可能被甲排斥的(excludable)，是指若存在 $\delta>0$ 及 N_0 使对一切 σ 及一切 $n\geq N_0$，有 $E(d(s,\bar{g}_n))>\delta$、(即 S 的某些 δ 一邻域的余集是可追近的)。而集 S 对甲来说是可追近的是指若存在甲的 σ_0 策略而 S 为对甲(具有 σ_0)为可追近。类似地，S 对乙为可排斥的也可给出定义。注意 S 为可追近的其充要条件为 S 的闭包为可追近。对每个 S，在 I 上有概率分布，把它记作：

$$R_1(s)=Co\{\sum_{i\in I}s_ib_{ij};j\in J\}$$

类似的，记

$$R_2(s)=Co\{\sum_{j\in J}t_jb_{ij};i\in I\}$$

这里 Co 表示"凸包"，所以若甲使用他的策略 s，则对于乙的一切 t，甲的期望支付将在 $R_1(s)$中。

定理 5.2.15 （1）设 S 在 R^M 中是闭的，若对一切 $x \notin S$，存在 I 上的概率 $s(x)$ 使得当 $y \in S$ 为与 x 的最近的点时，过 y 且垂直于直线 $x-y$ 的超平面将 x 由 $R_1(s(x))$ 中分开，则 S 是可追近的，可追近的策略可由下面的 σ 给出：在阶段 1，或当 $\bar{g}_n \in S$ 时，执行任何策略；否则，执行 $s_{m+1}=s(\bar{g}_m)$，$n \geqslant 1$. （2）$S \in R^M$ 中为闭凸集，它是可追近的充要条件是：对一切 t，$S \cap R_2(t) \neq \varnothing$. 否则，它当 τ 时为可排斥的，其中，设，$S \cap R_2(t_0)=\varnothing$，$t_n(h_n)=t_0$ 对一切 h_m 及一切 n 成立。

证 先证（1），引入 $d_n=d(s,\bar{g}_n)=\min\limits_{z \in S} d(z,\bar{g}_n)$，设 $\bar{g}_n \in S$，则 $\bar{g}_{n+1}=\bar{g}_n+\frac{g_{n+1}-\bar{g}_n}{n+1}$，于是 $E(d_{n+1}) \leqslant \frac{A}{n+1}$，其中 $A=\max\limits_{\substack{z \in S \\ i \in I \\ j \in J}} d(z,h_{ij})$，

而当 $\bar{g}_n \notin S$ 时，则令 y 为 S 中与 $\bar{g}_n$ 为最近的点，而 s_{n+1} 见（1）中的假设，现在 $(E(g_{n+1}|\bar{g}_n) \in R_1(s(\bar{g}_n))$，所以 $(E(g_{n+1}|\bar{g}_n)-y,\bar{g}_n-y) \leqslant 0$. 从而推出

$$d_{n+1}^2 \leqslant (\bar{g}_{n+1}-y,\bar{g}_{n+1}-y)$$

$$< [\frac{n(\bar{g}_n-y)}{n+1}+\frac{g_{n+1}-y}{n+1},\frac{n(\bar{g}_n-y)}{n+1}+\frac{g_{n+1}-y}{n+1}]$$

即

$$d_{n+1}^2 \leqslant (\frac{n}{n+1})^2 d_n^2+\frac{2n}{(n+1)^2}(\bar{g}_n-y,g_{n+1}-y)$$

$$+\frac{1}{(n+1)^2}\|g_{n+1}-y\|^2$$

于是

$$E(d_{n+1}^2|\bar{g}_n) \leqslant (\frac{n}{n+1})^2 d_n^2+\frac{A}{(n+1)^2}$$

现令 $B \geqslant \max(A^2,E(d_1^2))$，便推知对一切 n，有 $E(d_n^2) \leqslant B/n$ 因此在上面两种情形下均有：对一切 n，$E(d_n) \leqslant \sqrt{B/n}$ 成立，这就推出了（1）。

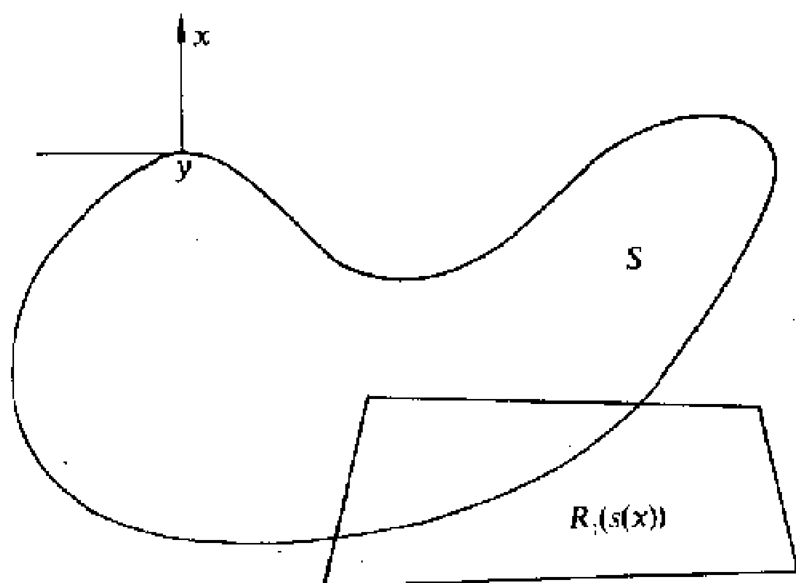


图 5.2.1

再证(2)。设对一切 t，$S\cap R_2(t)\neq\varnothing$，令 $x\notin S$，y 为 S 中距 x 为最近的点，再考虑由 $m_{ij}=(y-x,b_{ij})$所确定的矩阵 M，则有：

$$\min_t \max_i(y-x,\sum_{j\in J}t_j b_{ij}) = \min_t \max_{z\in R_2(t)}(y-x,z)$$

但右端的项总是大于$\min\limits_{z\in S}(y-x,z)$，这是因为对一切 t，$S\cap R_2(t)\neq\varnothing$. 记具此实支付矩阵的对策之值为 $v(M)$，则有

$$v(M)\geqslant \min_{z\in S}(y-x,z)$$

使用minmax定理，由此推出存在 S 使得对于一切 $j\in J$，有

$$(y-x,\sum_{j\in I}s_i b_{ij})\geqslant v(M)\geqslant \min_{z\in S}(y-x,z)$$

现在 S 是凸的，所以对一切 $z\in S$，$(y-x,y-z)\leqslant 0$，并且$\min\limits_{z\in S}(y-x,z)\geqslant(y-x,y)$，这就推出$\forall\ z\in R_1(s)$，$(y-x,z)\geqslant(y-x,y)$，但由假设$(y-x,y)>(y-x,x)$，所以超平面 $H=\{z;(y-x,z)=(y-x,y)\}$将 x 与 $R_1(s)$分开，再由(1)，便可推出结论。

最后，如果 S 不是可迫近的，它便是可排斥的，这是由于当 R_2

$(t_0)\cap S=\varnothing$时，则 $d(R_2(t_0),s)\geqslant\delta>0$，并且在乙具有稳定的等于 t_0 的策略 τ 时 $R_2(t_0)$是可迫近的。证毕。

与定理 5,2,14 相对应，可证：

定理 5.2.16 存在 $G_\infty(p)$中乙的策略 τ_0，使得对于每个 $\varepsilon>0$，存在 N，使当 $n\geqslant N$ 时有：

$$\gamma_n(\sigma,\tau)\leqslant \mathrm{Cav}u(p)+\varepsilon,\qquad \forall\,\sigma \tag{5,2,13}$$

证 设 H 为在点 p 处关于 Cav$u$ 的一个支撑平面，它是由 $\alpha\in R^L$ 确定的(注意 Cav$u$ 连续)，所以推出：

$$\begin{cases}\mathrm{Cav}u(p)=\alpha\cdot p\\ u(p)\leqslant\alpha\cdot q,\qquad \forall\, q\in P\end{cases}$$

现考虑 G_∞，它是具向量支付的对策，在向量中若 k 被选中，则其第 k 个分量便是支付，此时可证集 $S=\{\beta\in R^L,\beta^k\leqslant\alpha^k,\forall\,k\in K\}$关于乙是可迫近的。从而对乙，其直到阶段 n 的平均期望支付将小于 $\alpha\cdot p+\varepsilon=\mathrm{Cav}u(p)+\varepsilon$(对充分大的 n)。设 $\delta\notin S$，并设 η 为距 S 中的 δ 的最近的点。设 $p'\in P$，且平行于 $\delta-\eta$，再令 $H^1=\{\beta\in R^k;p'\cdot\beta=p'\cdot\eta\}$. 最后令 y 为乙在 $D(p')$中的优策略，于是

$$\sum_k p'^k sA^k y\leqslant u(p')\leqslant\alpha\cdot p'$$

现在注意若 $p'^k>0$，则 $\eta^k=\alpha^k$，所以 $\alpha\cdot p'=\eta\cdot p'<\delta\cdot p'$，于是 H^1 把 δ 从 $R_2(y)$中分离出来，所以 S 是可迫近的(依定理 5.2.15)。

定理 5.2.17 对一切 $p\in P$，$G_\infty(p)$有值 $v_\infty(p)$，且 $v_\infty(p)=\mathrm{Cav}u(p)$。

事实上由 $v_\infty(p)$的定义(定义 5.2.2)及定理 5.2.14 及定理 5.2.16，立即可得本定理。

注意定理 5.2.14，5.2.16 要比定理 5.2.17 强，这是因为最优策略与 ε 无关，但另一方面，显然有 $v_\infty(p)=\lim\limits_{n\to\infty}v_n(p)$，如果 $v_\infty(p)$存在，这是定义 5,2,2 便可立即得到。

另外还要说明几点：

（1） $v_\infty(p)$或$\lim\limits_{n\to\infty}v_n(p)$的计算要考虑一切可能的概率 p，以便计算 NR 对策 $D(p)$的值，再由此求得其Cav.

（2） 定理 5.2.17 非常强，因为它仅用一阶段对策的值给出无限对策的一个值。

（3） 甲在 v_∞中的优策略与他所用的信息复杂性相对应，一般说来，它既非 CR，也非 NR，而只是采用一种抽签的辅助方式来使用其信息。同时允许甲控制泄露给乙的信息总量。

§3 两边都缺少信息的对策

设 $A^{k,r}$，$k\in K=\{1,2,\cdots,L\}$，$r\in R=\{1,\cdots,M\}$，是由有限个$|I|$行及$|J|$列的矩阵构成的族，并设它们对应于二人零和对策，矩阵元素为 a_{ij}^{kr}，这里 $i\in I=\{1,\cdots,|I|\}$，$j\in J=\{1,\cdots,|J|\}$是两局中人甲、乙的纯策略。设 P（相应的，Q）为 R^L（相应的，R^M）中的单纯形，对每个 $p\in P$，$q\in Q$，考察如下之 n 次重复对策 $G_n(p,q)$，其定义如下：

（1） 在阶段 O，机会选择 k 依概率 p 行事，而 r 是依 q 行事。甲、乙均知道 p 及 q，但仅甲（相应的，乙）知道 k（相应的，r）的信息选择，上述所有描述都是双方共同知晓的知识。另外，设甲追求支付极大化，乙追求极小化。此时对策的执行类似于 $G_n(p)$。在每个阶段 m，大家都知道过去的历史 $h_m=(i_1,j_1,\cdots i_{m-1},j_{m-1})$。此时甲（相应的，乙）选择了 $i_m\in I$（相应的，$j_m\in J$），双方的选择立即都被双方知道。

（2） 在阶段 m，甲由乙处得到的支付总量为$\frac{1}{n}\sum\limits_{m=1}^{n}a_{i_m j_m}^{kr}$，由 min max定理，$G_n(p,q)$有值为 $v_n(p,q)$。此外用 $G_\infty(p,q)$记无限重

复对策。这种模型称为具标准信息的相互独立情形。而一般情形是依赖于信息矩阵的，这里(k,r)的概率不是边际（概率）的乘积。

下面先讨论v_n.

定理 5.3.1 $\forall n, v_n(p,q)$关于P为凹，而关于q为凸。

证 只须证明$v_n(p,q)$关于p为凹即可。关于q为凸可由对偶性得到。不难知道上节讨论v_n时开始的论证结果可直接推广于此。若引入记号$G'_n(a,p_1,p_2,q)$及$G''_n(a,p_1,p_2,q)$，并引用§2的讨论，便可证明。

下面再描述G_m中的策略。甲在$G_n(p,q)$中的策略可仿§2给出，即$\sigma_n=(\sigma_n^k)_{k\in K}$，其中$\sigma_n^k=(s_m^k)_{1\leqslant m\leqslant n}$. 这里$S_m^k$是由$H_m$到$I$上的概率集中的函数。对于乙，类似地有：$\tau_n=(\tau_n^r)_{r\in R}$，其中$\tau_m^r=(t_m^r)_{1\leqslant m\leqslant n}$. 这里$\tau_m^r$是由$H_m$到$J$上的概率集中的函数。今后采用记号$s_m=(s_m^k)_{k\in K}$，$t_m=(t_m^r)_{r\in R}$.

再仿§2建立递归公式。若在$G_n(p,q)$中甲、乙分别使用σ_n和τ_n，并设h_m是在阶段m的历史，我们用P_m记在h_m时出现K的后验条件概率。在$K\times H_m$上的概率可由p,σ_n,τ_n（仿§2）而推出。而在h_m时出现R的后验条件概率q_n仿此，其中有一些条件概率是对策的状态变量。

定理 5.3.2 在§2的命题2中用$V_n(P,q)$代替$v_n(P)$，$G_{m-1}(p,q)$代替$G_{m-1}(p)$，(p_m,q_m)代替p_m，$G_{n-m+1}(p_m,q_m)$代替$G_{n-m+1}(p_m)$，该命题仍然成立。

在推广过程中，§2中的引理5.2.1及引理5.2.2中的p用(p,q)代替，k用(k,r)代替时（即双方缺少信息）仍是成立的。

定理 5.3.3 $G_n(p,q)$与以下的对策有相同的值，在此对策中，在每个阶段m，后验概率均通告双方局中人，且在此阶段的支付也是依(p_m,q_m)进行估计的。

现对定理作如下说明。p与q的独立性能导致p_{m+1}仅依赖于$p_m, s_m(h_m)$及i_{m+1}，但不依赖于τ_n，并仿定理5.2.4，可推出关于v_n

(p,q)的递推公式：

$$v_{n+1}(P,q)=\frac{1}{n+1}\max_{s_1}\min_{t_1}\{\sum_{k,r}p^k q^r s_1^k A^{kr} t_1^r + n\sum_{i,j}\bar{s}_1(i)\bar{t}_1(j)v_n(p_i,q_j)\},\qquad(5.3.1)$$

其中记号含义均见§2。

至于 NR 对策的情形，可用类似于§2的方法讨论。即把 $D(p,q)$看作是 $G_1(p,q)$，其中设有一个局中人使用他们的个人信息（即双方都采用 NR 策略）。$D(p,q)$的支付矩阵是 A^{kr}的期望，并把它记作 $A(p,q)$。它等于$\sum_{k,r}p^k q^r A^{kr}$. 设 $u(p,q)$为 $D(p,q)$的值（注意 $u(p,q)$）在 $P\times Q$ 上连续)，此时可证下述定理：

定理 5.3.4 对一切$(p,q)\in(p\times Q)$，极限$\lim_{n\to\infty}v_n(p,q)$存在，且极限 $v(p,q)$为下述泛函方程组

$$\begin{cases} v(p,q)=\operatorname{Vex}_q\max\{u(p,q),v(p,q)\} & (5.3.2)\\ v(p,q)=\operatorname{Cav}_p\min\{u(p,q),v(p,q)\} & (5.3.3)\end{cases}$$

的唯一解。

定理的证明将在稍后给出，下面先作一些准备工作。

我们用 E_m 表示直到阶段 m 的历史条件下的期望，用 $g_m(s_m,t_m)$表示在阶段 m 时的支付的条件期望（阶段 m 是在所给历史之下来到此阶段的）。

引理 5.3.5 设 s_m 是甲的一个 NR 策略，并设它在 $D(p_m,q_m)$中是优策略，则对乙的任何策略 t_m，可得

$$g_m(s_m,t_m)\geqslant u(p_m,q_m)-\sum_r C(p_m)E_m(|q_{m+1}^r-q_m^r|)\qquad(5.3.4)$$

其中 $c(p_m)=\max_{i,j,r}\sum a_{ij}^{kr}p_m^k$.

证 对乙，利用引理 5.2.8，可推得

$$g_m(s_m,t_m) \geqslant g_m(s_m,\bar{t}_m) - \sum_r C(p_m)E_m(|q^r_{m+1} - q^r_m|).$$

现在由于 E_m 是NR，且 s_m 为 NR 优(均指在 $D(p_m,q_m)$中，可推出：$g_m(s_m,\bar{t}_m) \geqslant u(p_m,q_m)$。证毕。

引入定义：

定义 5.3.1 记

$$\begin{cases} \underline{v}(p,q) = \liminf v_n(p,q) \\ \bar{v}(p,q) = \limsup v_n(p,q) \end{cases} \tag{5.3.5}$$

并定义 $C = \max_{i,j,k,r} |a^{kr}_{ij}|$.

注意函数 $v_n(p,q)$在 $P \times Q$ 上是一致 Lipshitz 连续的，其模数为 $2C$，由此推出$\underline{v}$ 及 $\bar{v}$ 也是如此。另一方面，$\underline{v}(p,q)$(相应的，$\bar{v}(p,q)$)关于 p 为凹(相应的，关于 q 为凸)。确实，由于对一切 n，函数 $v_n(p,q)$关于 p 为凹，故$\underline{v}(p,q)$为凹函数的增序列的上确界。还可证明：

定理 5.3.6 下列不等式成立：

$$\begin{cases} \underline{v}(p,q) \geqslant \operatorname{Vex}_q \max\{u(p,q), \underline{v}(p,q)\} & (5.3.6) \\ \bar{v}(p,q) \leqslant \operatorname{Cav}_q \min\{u(p,q), \bar{v}(p,q)\} & (5.3.7) \end{cases}$$

证 只须证(5.3.6)即可，(5.3.7)可对偶地加以考虑。现证在 $G_n(p,q)$中甲可保证在甚大的 n 的情况下，至少得$\operatorname{Vex}_q \max\{u(p,q), \underline{v}(p,q)\}$，此即$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists N$，使得$\forall\ n \geqslant N$，存在甲在 $G_n(p,q)$中的 σ^ε_n 策略，使得$\forall\ \tau_n$，有 $\gamma_n(\sigma^\varepsilon_n,\tau_n) \geqslant \operatorname{Vex}\max\{u(p,q),\underline{v}(p,q)\} - \varepsilon$，现在引入 $d(p,q,n) = \max(\underline{v}(p,q) - v_n(p,q), 0)$；由前面的说明，序列 $d(p,q,n)$是一致 Lipschitz 连续，从而它一致收敛于 o，所以对一切 $\varepsilon>0$，存在某个 $N_1 = N_1(\varepsilon)$使对 $n \geqslant N_1$，$\max_{p,q} d(p,q,n) \leqslant \varepsilon/3$，现在定义 $N = N(\varepsilon) = \max\{M(3c/\varepsilon)^2, N_1(6c/\varepsilon)\}$，并关于 $n > N$，来考察 $G_n(p,q)$. 现设甲使用如下策略 σ^*；(1)在阶段 m，只要 $u(p_m,q_m) > \underline{v}(p_m,q_m)$，就采用 $D(p_m,q_m)$的优策略；(2)在剩下

的子对策中，一旦 $u(p_m,q_m)<\underline{v}(p_m,q_m)$，立即采用优策略。设 $m_0=\min\{m\,|\,u(p_m,q_m)<\underline{v}(p_m,q_m)\}$，若甲使用策略 σ^*，利用引理 5.3.5，甲在 $G_n(p,q)$ 中的期望支付至少是：

$$\frac{1}{n}E\{\sum_{m=1}^{m_0}u(p_m,q_m)-\sum_{m=1}^{m_0}C_r E_m(|q_{m+1}^r-q_m|)$$
$$+(n-m_0)[\underline{v}(p_{m_0},q_{m_0})-d(p_{m_0},q_{m_0},n-m_0)]\}$$

(5.3.8)

设 $w(p,q,n)=\max(f(p,q)-v_m(p,q),o)$，则

$$w(p,q,n)\leqslant\frac{c}{\sqrt{n}}\sum_r\sqrt{q^r(1-q^r)}$$

并且特别有 $f(p,q)\leqslant\underline{v}(p,q)$。

证　选择 f 使之成为满足上述诸不等式的最大者，于是有 $f(p,q)=\operatorname{Vex}_q\operatorname{Cav}\min[u(p,q),f(p,q)]$。再设 $w_o(q,n)=\frac{c}{\sqrt{n}}\sum_r\sqrt{q^r(1-q^r)}$，现只须证对一切 $\varepsilon>0$，甲可在充分大时的 $G_n(p,q)$ 中得到 $f(p,q)-w_0(q,n)-\varepsilon$. 由于 $f(p,q)\leqslant\operatorname{Cav}_p\min\{u(p,q),f(p,q)\}$，由 Caratheodory 定理推出对每个 $\varepsilon/n>0$ 及每一对 (p,q)，存在 $p_s\in P$ 及 $\lambda_s\in[0,1]$，$s=1,\cdots,L$ 使得：$\sum_s\lambda_s p_s=p$，$\sum_s\lambda_s=1$，并且有

$$f(p,q)-\frac{\varepsilon}{n}\leq\sum_s\lambda_s\min\{u(p_s,q),f(p_s,q)\}$$

现设 σ_0 是甲的如下策略：对一切 $m=1,\cdots,n$，考虑：(1) 只要 $u(p_m,q_m)\geqslant f(p_m,q_m)$，在阶段 m 采用 $D(p_m,q_m)$ 中的优策略，而一旦 $u(p_m,q_m)<f(p_m,q_m)$，在点 (p_m,q_m) 处使用类似于上面给出的 $p_{m,S},\lambda_S$，并在 $D(p_{m,S},q_m)$ 中当选择了 k 时以概率 $\lambda_S(p_{m,s}^k/p_m^k)$ 使用相应的优策略（这里假设使用一个类似于引理 5.2.13 中的辅助的抽签方式，以便在 $D(p_{m,S},q_m)$ 中采用优策略的总概率为 λ_S，而在

给定 s 时条件概率 p_{m+1}，为 $p_{m,s}$)。在阶段 m 的条件期望支付现在至少是：(1)当 $u(p_m,q_m)\geqslant f(p_m,q_m)$时，则由引理 5.3.5，支付为 $u(p_m,q_m)-C\sum_r E_m(|q_{m+1}^r-q_m^r|)$；(2)当 $u(p_m,p_m)<f(p_m,q_m)$，并当 s 被选定后，支付为：$u(p_{m,S},q_m)-C\sum_r E_m(|q_{m+1}^r-q_m^r|)$. 由于不论乙是否了解中间的抽签结果，甲都可以得到这样的支付。现在取在结果 S 上的期望，可得：

$$\sum_S \lambda_s[u(p_{m,S},q_m)-C\sum_r E_m(|q_{m+1}^r-q_m^r|)]$$

$$\geqslant f(p_m,q_m)-\frac{\varepsilon}{n}-C\sum_r E_m(|q_{m+1}^r-q_m^r|)$$

并注意上面最后的量在两种情况下都确实小于或等于该情况下的条件支付。现由于$\sum_S \lambda_S f(p_{m,S},q_m)\geqslant f(p_m,q_m)-(\varepsilon/n)$并且 $f(p,q)$关于 q 为凸，故推出

$$E_m(f(p_{m+1},q_{m-1}))\geqslant f(p_m,q_m)-\frac{\varepsilon}{n}.$$

此时在 $G_n(p,q)$中的平均期望支付将大于

$$f(p,q)-\frac{1}{n}(\sum_{m=1}^{n}\frac{m}{n})\varepsilon-\frac{1}{n}C\sum_{m=1}^{n}\sum_r E(|q_{m+1}^r-q_m^r|)$$

$$\geqslant f(p,q)-w_0(q,N)-\varepsilon$$

证毕。

推论 极限$\lim\limits_{n\to\infty} v_n(p,q)$存在。

证 由于 $\bar{v}(p,q)\leqslant \text{Vex Cav}\min\{u(p,q),\bar{v}(p,q)\}$，故有 $\bar{v}(p,q)\leqslant \underline{v}(p,q)$，由此得所希望的等式 。证毕。

因此可定义 $v(p,q)=\lim\limits_{n\to\infty} v_n(p,q)$.

定理 5.3.8 设不等式

$$\begin{cases}(a)\quad f(p,q)\geqslant \underset{p}{\text{Cav}}\ \underset{q}{\text{Vex}}\max\{u(p,q),f(p,q)\}\\(b)\quad f(p,q)\geqslant \underset{q}{\text{Vex}}\ \underset{p}{\text{Cav}}\min\{u(p,q),f(p,q)\}\end{cases}$$

成立，则有：(1) $v(p,q)$ 是(a)的最小解，并为(b)的最大解；(2) $v(p,q)$是(a)，(b)联立起来的唯一解。

证 先证(1)。由定理 5.3.6 可推出 $v(p,q)$满足(b)，而定理 5.3.7 推出 $v(p,q)$为其最大解，类似可讨论(a).

再证(2)。注意若 f 满足(a)及(b)，由(1)推出 $f(p,q) \geqslant v(p,q) \geqslant f(p,q)$，故(2)显然成立。证毕。

还可证下面的结论。

定理 5.3.9 $v(p,q)$为如下方程组：

$$\begin{cases} (a') & g(p,q) = \operatorname*{Vex}_q \max\{u(p,q),g(p,q)\} \\ (b') & g(p,q) = \operatorname*{Cav}_q \min\{u(p,q),g(p,q)\} \end{cases}$$

的唯一解。

证 由于 $v(p,q)$关于 q 为凸，故有

$$v(p,q) \leqslant \operatorname*{Vex}_q \max\{u(p,q),v(p,q)\}$$

并由定理 5.3.8(1) 推出 v 满足 (a')。类似可讨论(b')，现在若 $g(p,q)$满足(a')及(b')，g 关于 p 为凹而关于 q 为凸，它们便满足定理 5.3.8 中(a)及(b)，所以由该定理(2)推出唯一性也成立。证毕。

由定理 5.3.7 后的推论及定理 5.3.9，便给出定理 5.3.4 的证明。

再讨论收敛速度。

定理 5.3.10 在前述诸定理的假设下

$$-\frac{C}{\sqrt{n}} \sum_r \sqrt{q^r(1-q^r)} \leqslant v_n(p,q) - v(p,q)$$

$$\leqslant \frac{C}{\sqrt{n}} \sum_r \sqrt{p^r(1-p^r)} \qquad (5.3.10)$$

显然由定理 5.3.8 及其对偶，便可得到本定理，其讨论与 §2 中的相仿，实际上收敛的界为 $1/\sqrt{n}$，它是最好的情形。

下面再讨论max min与min max诸量。考虑 $G_\infty(p,q)$，仿 $G_\infty(p)$，可定义甲的策略(参看§2)，此时引入。

定义 5.3.2 若 $f(p,q)$满足：(1)对乙的所有策略 τ，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$ 及甲的策略 σ，使对一切 $n>N$，有 $\gamma_n(\sigma,\tau)>f(p,q)-\varepsilon$；(2) $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N(\varepsilon)$及$\exists\ \tau_\varepsilon$(乙的策略)，使对甲的一切策略 σ，及一切 $n>N(\varepsilon)$，有 $\gamma_n(\sigma,\tau_\varepsilon)<f(p,q)+\varepsilon$，则称 $f(p,q)$为 $G_\infty(p,q)$的 min max. 若上述 $f(p,q)$存在，它是乙在 $G_\infty(p,q)$中所能保证(使甲得到的)最低的支付。

类似的方法可定义max min，与过去一样，当max min与min max相等时称 $G_\infty(p,q)$有一个值。此时可证：

定理 5.3.11 $G_\infty(p,q)$的 min max 等于是$\underset{q}{\mathrm{Vex}}\,\underset{p}{\mathrm{Cav}}\,u(p,q)$而 $G_\infty(p,q)$的 max min 等于是$\underset{p}{\mathrm{Cav}}\,\underset{q}{\mathrm{Vex}}\,u(p,q)$.

这个定理将分数步证明，即先证乙可保证$\underset{q}{\mathrm{Vex}}\,\underset{p}{\mathrm{Cav}}\,u(p,q)$。它基于如下事实：若乙可保证(甲获取)某个 $f(p,q)$，他同样也能保证$\underset{q}{\mathrm{Vex}}\,f(p,q)$。因此我们应先证：

定理 5.3.12 乙在 $G_\infty(p,q)$中有策略 τ_0 使对于每个 ε，存在 N，使对于甲的一切策略 σ 及一切 $n>N$，有

$$r_n(\sigma,\tau_0) < \underset{q}{\mathrm{Vex}}\,\underset{p}{\mathrm{Cav}}\,u(p,q) + \varepsilon$$

成立。

证 若乙不知他自己的信息(即 r)，并采用了 NR，对策 $G_\infty(p,q)$由于缺少一边的信息而蜕化为对策 $\overline{G}_\infty(q)(p)$，其中支付矩阵为 $A^k(q)=\sum\limits_r q^r A^{kr}$，并且概率 p 是在 K 上的分布。而定理 5.2.17 说在此对策中乙可保证$\mathrm{Cav}\,\bar{u}(p,q)$，其中 $\bar{u}(p,q)$是 $\overline{G}_1(q)(p)$的值。在其中乙限于他自己的 NR 策略，由此得到 $\bar{u}(p,q)=u(p,q)$，并且乙可保证$\underset{p}{\mathrm{Cav}}\,u(p,q)$。使用引理 5.2.13，他可保证$\underset{q}{\mathrm{Vex}}\,\underset{p}{\mathrm{Cav}}\,u(p,q)$，更进一步使用定理 5,2,16，可推出存在一个与 ε 无关

的策略 τ，它可保证支付为所要求的。证毕。

注意此结果比定义 5,3,2 中(2)要求的强，因为 τ 的构造不涉及 ε. 然而乙使支付不可能更多，此事实之证明简述如下：知道 τ 后，甲可在每一阶段计算 q_m，并在阶段 N 为充分大时采用 NR，以便尽可能利用他关于信息的最大总量，而在以后的情形中，当乙也采用 NR 时也是如此。甲此时可得 $u(p,q_N)$，从而能得到 $\mathrm{Cav}\,u(p,q_N)$，此时他的期望支付将是：

$$E\,\underset{p}{\mathrm{Cav}}\,u(p,q_N) \geqslant \underset{q}{\mathrm{Vex}}\,\underset{p}{\mathrm{Cav}}\,u(p,q)$$

故断言成立。

现再引入以下记号。由引理 5.2.6，可知对一切 σ,τ，有

$$E_{p,\sigma,\tau}\sum_{r}\sum_{m=1}^{\infty}(q_{m+1}^{r}-q_{m}^{r})^{2}\leqslant\sum_{r}q^{r}(1-q^{r})$$

对于给定的 τ 及 $\varepsilon>0$，设 σ^{*} 及 N 已选定，使得

$$E_{\varnothing,\sigma^{*},\tau}\sum_{r}\sum_{m=1}^{N-1}(q_{m+1}^{r}-q_{m}^{r})^{2}$$

$$\geqslant\sup_{\sigma}E_{p,\sigma,\tau}\sum_{r}\sum_{m=1}^{\infty}(q_{m+1}^{r}-q_{m}^{r})^{2}-\varepsilon \qquad (5.3.11)$$

现在设 NR_{∞}^{I} 是甲的 NR 策略集，即使得 $\forall\,k$、$\forall\,m$，$\forall\,h_m$ 有 $s_m^k(h_m)=\bar{s}_m(h_m)=\sum_{K}p_m^k\,s_m^k(h_m)$。由于 q_m 仅依赖于 q,r,h_m,j_m. 当我们用 $\sigma_0\in NR_{\infty}^{I}$ 代替 σ^{*} 时，条件概率的序列仍是它本身。而 σ_0 是由 $s_{m,0}(h_m)=\bar{s}^{*}(h_m)$，$\forall\,m$，$\forall\,h_m$，所确定。

现设 $\sigma_0\in\mathrm{NR}_{\infty}^{I}$，并设 N 满足(5.3.11)，可证：

引理 5.3.14 对甲的每一个与 σ_0 直到阶段 N 重合的策略 σ，可推知对一切 $n\geqslant N$，有

$$E\Big(\sum_{r}|q_n^r-q_N^r|\Big)\leqslant\sqrt{M\varepsilon}$$

成立。

证 使用 Cauchy-Schwartz 不等式，可得

$$E(\sum_r |q_n^r - q_n^r|) \leqslant [E(\sum_r (q_n^r - q_N^r)^2 \cdot M]^{1/2}$$

$$\leqslant \sqrt{M}\{E(\sum_r \sum_{m=N}^{\infty} (q_{m+1}^r - q_m^r)^2]\}^{1/2} \leqslant \sqrt{M}\ \sqrt{\varepsilon}$$

这是因为由 σ_0 及 N 的定义，可得

$$E_{p,\sigma,\tau}[\sum_r \sum_{m=N}^{\infty} (q_{m+1}^r - q_m^r)^2] < \varepsilon$$

之故。证毕。

定理 5.3.15 对乙的任何策略 τ 及每个 $\tilde{\varepsilon}>0$，存在 $\tilde{N}$ 及 σ（甲的策略），使之 $\forall\ n>\tilde{N}$，有

$$\gamma_n(\sigma,\tau) > \operatorname*{Vex}_q \operatorname*{Cav}_p u(p,q) - \varepsilon$$

证 对每个 τ，考虑 σ_0 及 N（定义见前），并引入甲的如下策略 σ：(1)直到阶段 N，采取 σ_0；(2)由于 σ_0 是 NR，$p_N=p$，仿引理 5.2.13，引入 p_l,λ_l 使满足：

$$\begin{cases} \sum_l \lambda_l\, u(p_l,q_N) = \operatorname{Cav}\ u(p,q_N) \\ \sum_l \lambda_l = 1 \\ \sum_l \lambda_l\, p_l = p \end{cases}$$

(3)若 k 已选定，甲在 $D(p_l;q_N)$ 中以概率 $\lambda_l(p_l^k/P^k)$ 选取稳定优策略 s_l，从而对于 $m\geqslant N$，当已选定 l，便有

$$g_m(s_l,t_m) = \sum_{k,r} p_l^k\, q_m^r\, s_l\, A^{kr}\, t_m^r = \sum_r q_m^r\, s_l\, \overline{A}^r(p_l) t_m^r$$

$$\geqslant \sum_r q_m^r\, s_l\, \overline{A}^r(p_l)\bar{t}_m - C\sum_r E_m(|q_{m+1}^r - q_m^r|)$$

其中 $\overline{A}^r(p_l)=\sum_k p_l^k A^{kr}$，由引理 5.2.8，便得：

$$g_m(s_l,t_m) \geqslant \sum_r q_N^r\, s_l\, \overline{A}^r(p_l)\bar{t}_m$$

$$- C\sum_r E_m(|q_{m+1}^r - q_m^r|) - C\sum_r |q_m^r - q_N^r|$$

由于 s_l 在 $D(p_l,q_n)$ 中为优，且 $\bar{t}_m$ 为 NR，故 $\sum_r q_N^r s_l \bar{A}^r(p_l)\bar{t}_m \geqslant u(p_l,q_n)$，现在有

$$E_N[u(p_l,q_N)] = \sum_l \lambda_l u(p_l,q_N) = \underset{p}{\mathrm{Cav}}\, u(p,q_N)$$
$$\geqslant \underset{q}{\mathrm{Vex}}\,\underset{p}{\mathrm{Cav}}\, u(p,q_N)$$

以及

$$E[\underset{q}{\mathrm{Vex}}\,\underset{p}{\mathrm{Cav}}\, u(p,q_N)] \geqslant \underset{q}{\mathrm{Vex}}\,\underset{p}{\mathrm{Cav}}\, u(p,q)$$

利用引理 5.2.6，可得：

$$\frac{C}{N+n}\sum_r\sum_{m=N}^{N+n} E(q_{m+1}^r - q_m^r) \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}\sum_r \sqrt{q^k(1-q^k)}$$

所以对此首 $n+N$ 个阶段的平均期望支付是：

$$r_{N+n}(\sigma,\tau) \geqslant \underset{q}{\mathrm{Vex}}\,\underset{p}{\mathrm{Cav}}\, u(p,q) - \frac{C}{\sqrt{n}}\sum_r \sqrt{q^k(1-q^k)}$$
$$-\frac{Cn}{N+n}\sqrt{M\varepsilon} - \frac{CN}{N+n}$$

现在对每个 $\tilde{\varepsilon}>0$，选取 ε 使得 $C\sqrt{M\varepsilon}<\tilde{\varepsilon}/2$，则 N，σ_0（见前）及 $\tilde{N}$ 使 $n>\tilde{N}$ 时能推出

$$\frac{C}{\sqrt{n}}\sum_r \sqrt{q^k(1-q^k)} - \frac{CN}{N+n} < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$$

证毕。

推论 当且仅当

$$\underset{p}{\mathrm{Cav}}\,\underset{q}{\mathrm{Vex}}\, u(p,q) = \underset{q}{\mathrm{Vex}}\,\underset{p}{\mathrm{Cav}}\, u(p,q) \qquad (5.3.12)$$

时 $G_\infty(p,q)$ 有值。

最后还应指出，存在没有值的对策 $G_\infty(p,q)$，这只要举个不满足(5.3.12)的例子，例如

$$A^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\quad A^{12} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{21}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad A^{22}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}。$$

便是一例。

§4 序列对策

本节讨论一类特殊的对策——序列对策(Sequential games)。其中局中人轮流选择策略，设矩阵 A^{kr}(有限集)，其元素为 a_{ij}^{kr}，$k\in K\in\{1,\cdots,L\}$，$r\in R=\{1,\cdots,M\}$，$i\in I=\{1,\cdots,|I|\}$，$j\in J=\{1,\cdots,|J|\}$，对每个 $p\in P$，$q\in Q$，定义 n 阶段对策 $G_n(p,q)$ 如下：

(1)在阶段 0，机会选择 k 依概率 p 进行(相应地，r 依概率 q 进行)，并且甲(相应的，乙)知道了信息(与§3 中阶段 0 相同)。

(2) 在阶段 m，在知道历史 $h_m=(i_1,j_1,\cdots,i_{m-1},j_{m-1})$ 后，甲在 I 中选取 i_m，并把此选择告诉乙。在 $h_m'=(i_1,j_1,\cdots,j_{m-1},i_m)$ 后，乙在 J 中选取 j_m，于是 h_{m+1} 便成为公共信息知识。

(3) 在阶段 n，甲从乙处所得总量是 $\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}a_{i_mj_m}^{kr}$，另外，有关对策的规则都是双方共有的知识。

用 $v_n(p,q)$ 表示 $G_n(p,q)$ 的值，并记 $v(p,q)=\lim\limits_{n\to\infty}v_n(p,q)$，显然，通过在每个阶段将乙的策略进行规范化，可以得到§3 中的情形。支付矩阵 B^{kr} 具有 $|I|$ 行及 $|J|^{|I|}$ 列，其定义为：$b_{i\tilde{j}}^{kr}=a_{i\tilde{j}(i)}^{kr}$，其中 $\tilde{j}=(\tilde{j}(i),\cdots,\tilde{j}(I))$。事实上在这种情况下信息矩阵不是标准的，因甲不知乙所使用的全部纯策略——即向量 $\tilde{j}$. 但不论如何，由于支付对某些 $\tilde{j}$ 及 $\tilde{j}'$ ——它们使 $\tilde{j}(i)=\tilde{j}'(i)$ ——是相同的。故可假设一切字母为相异。这里总假设甲是追求有最大效益(支付)者。

先考察 $G_n(p,q)$ 中的策略。甲的策略为：$\sigma_n=(\sigma_n^k)_{k\in K}$，其中 $\sigma_n^k=(s_m^k)_{1\leq m\leq n}$，并且对每个 m，s_m^k 是由 $H_m=(I\times J)^{m-1}$ 到 I 上概率分

布的集中的函数，对于乙，此时有：$\tau_r=(\tau_n^r)_{r\in R}$，其中 $\tau_n^r=(t_m^r)_{1\leqslant m\leqslant n}$，且对每个 m，t_m^r 是由 $H_m^1=(I\times J)^{m-1}\times I$ 到 J 上概率分布的集中的函数。现引入 $s_m=(s_m^k)_{k\in K}$，$t_m=(t_m^r)_{r\in R}$，并讨论 NR 对策。

类似 § 3，当甲和乙在对策 $G(p,q)$ 中使用 NR 策略时，称之为 $D(p,q)$ 对策，此时支付仍为 $A(p,q)=\sum_{k,r}p^k q^r A^{kr}$，用 $u(p,q)$ 记 $A(p,q)$ 的值，由于对策是序列的，故

$$u(p,q)=\max_i\min_j\sum_{k,r}p^k q^r a_{ij}^{kr} \tag{5.4.1}$$

先讨论一边缺少信息的情形。

若 $R=\{1\}$（见 § 2），故甲——追求最大（支付）效益者，也是得到信息的人，且是首先进行行动者。利用定理 5.2.7，可知对一切 n，有 $v_n(p)\geqslant \operatorname{Cav} u(p)$，对此特殊情况，有如下结果：

定理 5.4.1 $v_1(p)=\operatorname{Cav}_p u(p)$

证 已知 $v_1\geqslant \operatorname{Cav} u(p)$，当甲、乙双方分别采用 s_1 和 t_1 时，计算 $G_1(p)$ 中的期望支付如下：

$$g_1(s_1,t_1)\overset{\text{def}}{=}g(s,t)=\sum_{i,j,k}s^k(i)t_j(j)p^k a_{ij}^k$$

也即

$$g(s,t)=\sum_{i,j,k}\bar{s}(i)\ t_i(j)\ p_i^k\ a_{ij}^k$$

其中 $\bar{s}(i)=\sum_k p^k s^k(i)$，并对每个使 $\bar{s}(i)\neq 0$ 的 i，设 $p_i^k=p^k s^k(i)/\bar{s}(i)$，从而

$$g(s,t)=\sum_{i,j}\bar{s}(i)\ t_i(j)\ \sum_k p_i^k\ a_{ij}^k$$

也即对一切 s，有

$$\min_t g(s,t)=\sum_i\bar{s}(i)\min_j\sum_k p_i^k\ a_{ij}^k\leqslant\sum_i\bar{s}(i)\ u(p_i)$$

因 $\sum_i \bar{s}(i)p_i=p$ 及 $\sum_i\bar{s}(i)=1$，由此推出对一切 S 有 $\min_t g(s,t)\leqslant$

$\mathrm{Cav}\ u(p)$。证毕。

推论 对一切 n，有 $v_n(p)=\mathrm{Cav}\ u(p)$成立。

证 定理 5.25 说明序列 v_n 是减小的，并且定理 5.2.7 说明 $v_n \geqslant \mathrm{Cav}\ u$，所以推论的结果可由上述定理直接推出。证毕。

此时当然有$\lim\limits_{n\to\infty} v_n(p)=\mathrm{Cav}\ u(p)$，且进一步推知序列关于 n 为一常数。

此性质可使我们在 $G_n(p)$中确定双方的优策略。对甲的优策略可给出如下：若$\sum\limits_l \lambda_l=1$，$\sum\limits_l \lambda^l p^l=p$，$\sum\limits_l \lambda_l u(p_l)=\mathrm{Cav}u(p)$，且当 k 已选定时，甲在 $D(p_l)$中用概率 $\lambda_l(p_l^k/p^k)$选用优策略，即 NR 稳定策略 x_l 的优策略。

定理 5.2.14 推出这个策略能保证在每一阶段可得到一个大于 $\mathrm{Cav}u(p)$的支付。

现在构造乙的优策略，此时准备使用定理 5.2.15，设 H 是 $\mathrm{Cav}u$ 在 p 处的支撑超平面，它由 $\alpha\in R^L$ 确定。作集合 $S=\{\beta\in R^L$，$\beta^k\leqslant\alpha^k, k\in K\}$，它关于乙是可迫近的(见定理 5,2,16)。故使用定理 5,2,15(2)，S 不被甲所排斥（读者可自行证明)。特别对于每一着，如第 i 着有：$R_1(i)=C_0\{a_{ij};j\in J\}$，其中 $a_{ij}=(a_{ij}^k)_{k\in K}$与 S 有一个非空交。从而存在 t_i，使得$\sum\limits_j t_i(j)a_{ij}$属于 S，并从而推出对一切 i，

$$\sum_k\sum_j t_i(j)\ a_{ij}^k \leqslant \alpha\cdot p=\mathrm{Cav}\ u(p)$$

（读者可以自己试证之）。乙在 $G_n(p)$中的一个优策略是：对所有 i 及一切 m，若 $i_m=i$，则 $t_m(h'_m)=t_i$，这些策略显然产生了 $G_\infty(p)$中的最优策略。注意一般说来，若 σ 是 $G_\infty(p)$中的优策略。

σ_n(它是 σ 在 $G_n(p)$中的限制)并不一定是最优，而另一方面，若 σ_n 在 $G_n(p)$中为最优，这时没有在 $G_\infty(p)$中的优策略 σ'，其在 $G_n(p)$中的限制与 σ_n 重合。关于乙可仿此讨论。

再讨论两边都缺信息的情形。对于序列对策，先推证关于 v_n 的递归公式（它比一般情形要简单些）。

定义 5.4.1 设 $G_n^{i_1}(p,q)$的值是 $v_n^{i_1}(p,q)$，这种对策是 n 一阶段对策 $G_n(p,q)$中在第一阶段中甲限于采用 i_1，（即 $s_1^k(i_1)=1$，$\forall\ k$）者。

定理 5.4.2 $v_n(p,q)=\operatorname*{Cav}_p \max_{i\in I} v_n^{i_1}(p,q)$

证 对一切 $i_1\in I$，显然有 $v_n\geqslant v_n^{i_1}$，从而由于 v_n 关于 p 为凹，故 $v_n\geqslant\operatorname*{Cav}_p \max_{i_1} v_n^{i_1}$. 为要证其他不等式，我们把双方在 $G_n^{i_1}(p,q)$中的策略规范化。为简化记号，把 i_1 写作 i，并把支付矩阵记作 B_i^{kr}. 策略记作 x_i^k 及 y_i^k. 若甲使用 (s_1,x)（记作 s，x）而乙使用 y，在 $G_n(p,q)$中的期望支付为（记号见 NR 对策）：

$$\gamma_n(s,x,y)=\sum_{i,k,r} s^k(i)\,p^k\,q^r\,x_i^k\,B_i^{kr}\,y_i^r=\sum_{i,k,r}\bar{s}(i)\;p_i^k\,q^r\,x_i^k\,B_i^{kr}\,y_i^r$$

因为由定义，$\min_y\sum p_1^k\,q^r\,x_i^k\,B_i^{kr}\,y_i^r\leqslant v_n^i(p_i,q)$，故推知：

$$\min\gamma_n(s,x,y)\leqslant\sum_{i,k,r}\bar{s}(i)\;v_n^i(p_i,q)$$

$$\leqslant\sum_{i,k,r}\bar{s}(i)\;\max_{j\in J} v_n^j(p_i,q)\leqslant\operatorname*{Cav}_p\ \max_i v_n^i(p,q)$$

证毕。

推论

$$nv_n(p,q)=\operatorname*{Cav}_p\ \max_j\ \operatorname*{Vex}_q\ \min_j\{\sum_{k,r} p^k\,q^r\,a_{ij}^{kr}$$
$$+(n-1)v_{n-1}(p,q)\}\qquad(5.4.2)$$

证 实际上与上面一样，有 $v_n^i(p,q)=\operatorname{Vex}\min v_n^{i,j}(p_i,q)$，现在由于第一着是$(i,j)$，所以

$$nv_n^{i,j}(p,q)=\sum_{k,r} p^k\,q^r\,a_{ij}^{kr}+(n-1)\,v_{n-1}(p,q)$$

证毕。

在§3 中，序列 v_n 不是单调的，但此时却有：

定理 5.4.3 若甲先采取行动并追求极大化，则对一切 n，在 $P\times Q$ 上有 $v_n(p,q)\geqslant v_{n-1}(p,q)$。

证 我们利用(5.4.2)为简单计，将记号简化为：$\underset{p}{\text{Cav}}$ 写作 C，$\underset{q}{\text{Vex}}$ 写作 V，$\underset{i}{\max}$ 写作 M，$\underset{j}{\min}$ 写作 m，并记 $S(i,j,p,q)\overset{def}{=\!=\!=}\sum_{k,r}p^k q^r a_{ij}^{kr}$. 现在

$$2v_2(p,q)=CMVm(S(i,j,p,q)+v_1(p,q))$$
$$\geqslant CM(VmS(i,j,p,q)+v_1(p,q))$$

由于：(1) $\text{Vex}(a+b)\geqslant\text{Vex}a+\text{Vex}b$(对一切 $P\times Q\rightarrow R$ 的函数 a,b 成立)，并且 v_n 对一切 n，关于 q 为凸，故推出

$$2v_2(p,q)\geqslant C[MVms(i,j,p,q)+v_1(p,q)]$$

把函数 $MVmS(i,j,p,q)$ 记作 $g_1(p,q)$，便有 $v_1=cg_1$. 现在注意：(2)$\text{Cav}(a+t\text{Cav}(a))=(1+t)\text{Cav}a$ 对一切的 $P\times Q\rightarrow R$ 的函数 a，及一切 $t\in R^+$ 成立)，所以 $2v_2\geqslant v_1$，现假设 $v_n\geqslant v_{n-1}$，于是：

$$(n+1)v_{n+1}(p,q)=CMVm(S(i,j,p,q)+nv_n(p,q))$$
$$\geqslant CMVm[S(i,j,p,q)+(n-1)v_{n-1}(p,q)+v_n(p,q)]$$
$$\geqslant CM\{Vm[S(i,j,p,q)+(n-1)v_{n-1}(p,q)]+v_n(p,q)\}$$

这是利用(1)得到的。现在引入：

$$g_n(p,q)=MVm[S(i,j,p,q)+(n-1)v_{n-1}(p,q)]$$

由于 $nv_n=Cg_n$，(2)可推出：

$$(n+1)v_{n+1}(p,q)\geqslant C(g_n(p,q)+\frac{1}{n}Cg_n(p,q))$$
$$=(n+1)v_n(p,q)$$

证毕。

特别，当考虑一边缺乏信息的序列对策时(其中得到信息的局中人是先采取行动并追求最大利益者)，已知 v_n 是减小的(正如§2中所描述的所有的一边缺少信息的对策一样)。而另一方面 v_n 是增加的(本节定理 5.4.3)，故序列关于 n 是常数，它是定理 5.4.1 推论的另一证明。

在§3中（定理5.3.10）给出 v_n 到 $\lim_{n\to\infty} v_n$ 的收敛速度的界是 $O(1/\sqrt{n})$，并且它是最好的界。对于这个序列对策，实际上有如下结果：

定理 5.4.4 在上一定理假设下，存在 $k\in R$ 使得在 $P\times Q$ 上对一切 n，有

$$0\leqslant v(p,q)-v_n(p,q)\leqslant\frac{k}{n}$$

并且它是最好的界。

证 对每个 $i\in I$，引入 $f_i(p,q)=-mS(i,j,p,q)$，f_i 是连续的且关于 p 与 q 为凸，再设

$$f(p,q)=\sum_i f_i(p,q)-L$$

其中 $L\in R$ 的选取是使得在 $P\times Q$ 上有 $v_1(p,q)\geqslant v(p,q)+f(p,q)$ 成立，这里 v_1 及 v 在 $P\times Q$ 上为有界。再假设 $nv_n(p,q)\geqslant nv(p,q)+f(p,q)$，再次利用(5.4.2)，便得：

$$\begin{aligned}(n+1)v_{n+1}(p,q)&\geqslant CMm[S(i,j,p,q)+f(p,q)+nv_n(p,q)]\\&\geqslant CM[V(mS(i,j,p,q)+f(p,q)+nv(p,q))]\end{aligned}$$

由于定理5.3.4中，关于 $v(p,q)$ 的表达式，可见 v 关于 q 为凸。但由构造方法：$mS(i,j,p,q)+f(p,q)=\sum_{\substack{l\neq i\\ l\in I}}f_l(p,q)-L$，所以它关于 q 仍是凸的，从而

$$(n+1)v_{n+1}(p,q)\geqslant C[MmS(i,j,p,q)+f(p,q)+nv(p,q)]$$

再利用(5.4.1)，便得 $MmS(i,j,p,q)=u(p,q)$，所以

$$(n+1)v_{n+1}(p,q)\geqslant C[u(p,q)+f(p,q)+nv(p,q)]$$

利用对 $P\times Q\to R$ 上的一切 a,b 有 $\mathrm{Cav}(a+b)\leqslant\mathrm{Cav}a+\mathrm{Cav}b$ 之事实，推出当 $a=u+f+nv$，而 $b=-f$ 时，有

$$(n+1)v_{n+1}(p,q)\geqslant C[u(p,q)+nv(p,q)]-C[-f(p,q)]$$

又因 $-f$ 关于 p 为凹，故得

$$(n+1)v_{n+1}(p,q) \geqslant C\{(n+1)\min[u(p,q),v(p,q)] + f(p,q)\}$$

故利用定理 5.3.4,得到

$$(n+1)v_{n+1}(p,q) \geqslant (n+1)v(p,q) + f(p,q)$$

f 是有界的,且 v_n 为增加,从而证得结论。证毕。

下面的例说明它是最好的界。

例 设 $K=\{1\}$,$R=\{1,2\}$,这是一边缺少信息,但得到信息的局中人第二个采取行动且为追求极小者,并设:

$$A^{11}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix},\quad A^{12}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

并设 $u(q)$,$v_n(q)$,$v(q)$具以下形式:

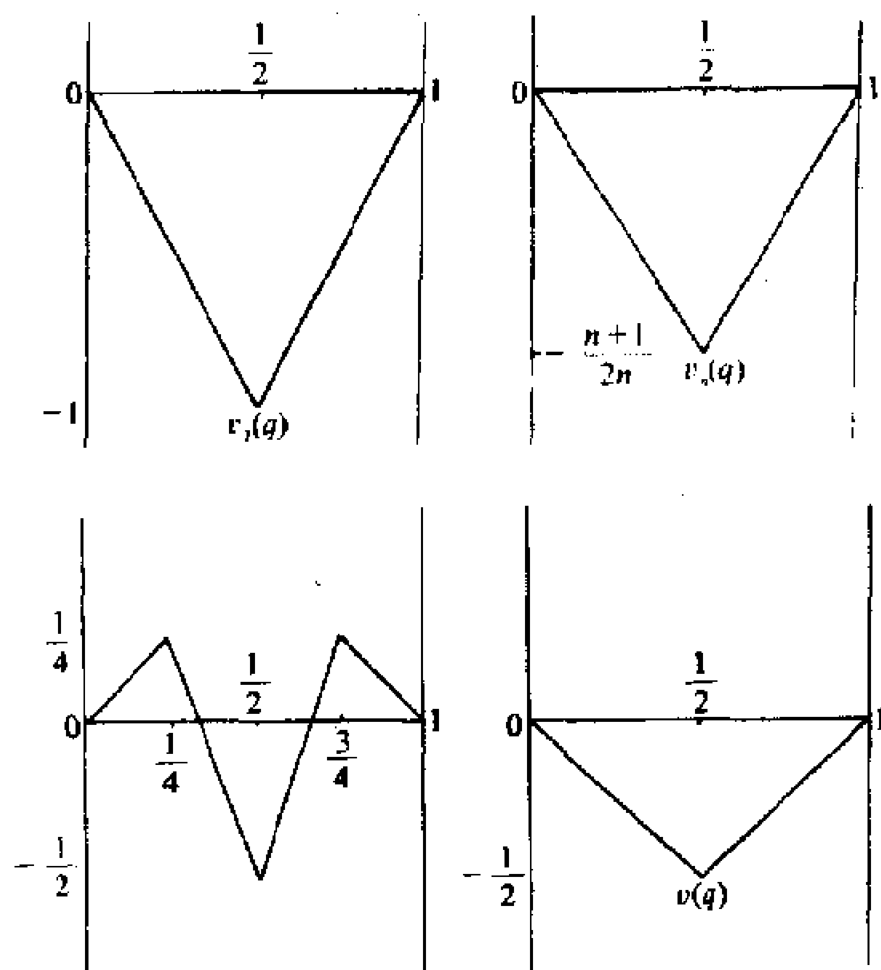


图 5.4.1

注意以下函数可知 $v(\frac{1}{2})-v_n(\frac{1}{2})=\frac{1}{2n}$，这就说明定理的断言。

§5 一些其他课题

1. 首先讨论选择概率相依的情形。这是 Merten 与 Zamir 于 1971—1972 年讨论的。回忆在 §3 中两边都缺少信息的情形，若选择概率 (k,r) 不再互相独立，便是这里讨论的问题。设 (A^k)，$k\in K=\{1,2,\cdots,L\}$ 是 $|I|\times|J|$ 的支付矩阵的有限族，并设 p 是在 K

上的概率分布，现把 K 划分作如下两个部分，其中 I 对应于甲，II 对应于乙：

$$K^{I}=\{K^{I}_{1},\cdots,K^{I}_{a},\cdots,K^{I}_{A}\},$$

$$K^{II}=\{K^{II}_{1},\cdots,K^{II}_{b},\cdots,K^{II}_{B}\}$$

现定义重复对策 $G_n(p)$ 如下：在阶段 0，依分布 p 选择 k，并把 a 告知甲把 b 告知乙，其中 $k\in K^{I}_{a}\cap K^{II}_{b}$，然后再按 § 3 的方式进行对策。在阶段 n 之后的支付为 $\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} p^{k} a^{k}_{i_m j_m}$，现对 K 作一解释。若设 $k=(k_1,k_2)$，而 p 便是在 $K_1\times K_2$ 上的一个概率矩阵，再假设 $L=L_1\times L_2$，这里 $A=L_1$，$B=L_2$，并且 $K^{I}_{1}=\{(k_1,k_2);k_2\in K_2\}$，$K^{II}_{k_2}=\{(k_1,k_2);k_1\in K_1\}$，这时每个局中人在所论对策中按各自的类型而进行对局。在 § 3 中所说的相互独立的情形是 $p(k_1,k_2)=p_1(k_1)p_2(k_2)$。

现引入相应记号与定义。设 $\mathscr{K}^{I}$ 是 K^{I} 所生的 σ 一域，定义在 K 上的函数 f，若它关于 $\mathscr{K}^{I}$ 是可测的（如在每个 K^{I}_{a} 上 f 为常数），则称 f 为 I 一可测，类似地可定义 II 一可测，这里 I 对应于甲，II 对应于乙。再设 P 为 R^{L} 的单纯形，对每个 $p\in P$，引入 P 的两个凸紧子集如下：

$$\Pi_{I}(p)=\{\alpha^{*}p\mid(\alpha^{*}p)\in P,\text{其中}(\alpha^{*}p)=\alpha_i p_i,\alpha\text{ 为 I 一可测}\}\qquad(5.5.1)$$

$$\Pi_{II}(p)=\{\beta^{*}p\mid(\beta^{*}p)\in P,\text{其中}(\beta^{*}p)=\beta_i p_i,\beta\text{ 为 II 一可测}\}\qquad(5.5.2)$$

而一个由 P 到 R 中的函数，若对每个 $p\in P$，它关于 $\Pi_{I}(p)$ 的限制是凹的，便称该函数是 I 一凹的。类似地可定义 II 一凸。最后，对每个 $f:P\to R$，$\mathrm{Cav}_{I} f$ 是将 P 上大于或等于 f 的 I 一凹函数中最小者。类似地可知 $\mathrm{Vex}_{II} f$ 的含义。

定理 5.5.1 $v_n(p)$ 关于每个 n 是 I 一凹及 II 一凸的。

定理的证明类似于§2中关于$v_n(p)$对一切n在P上为凹的证明。其中在$\Pi_1(p)$中取p_1及p_2。剩下来只要$p_1 \in \Pi_1(p)$，便有对一切$a \in A$，$p_1(k|a)=p(k|a)$对一切k成立，并由此推出$v_n'=v_n$。

仿§3定义σ_n及τ_n，不过它们现在应该分别是Ⅰ—可测及Ⅱ—可测的，递归公式及定理5.3.3均可自然地作相应推广，NR对策也可仿§3定义，但它取$D(p)=\sum_k p^k A^k$之形。

和§3相比，主要差别来自如下事实：即p_m不能分解成p_m^1（它是p^1，σ及h_m的函数）和p_m^2（它是p^2，τ及h_m的函数）。虽然如此，若s_m是NR，便可推出$p_{m+1} \in \prod_1(p_m)$，也即对一切$b \in B$，$p_{m+1}(k|b)=p_m(k|b)$，此时定理5.3.4可推广为：

定理5.5.2 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(p)$存在，且为下述方程组：

$$\begin{cases} v(p)=\underset{\mathrm{I}}{\mathrm{Vex}}\max\{u(p),v(p)\} & (5.5.3) \\ v(p)=\underset{I}{\mathrm{Cav}}\min\{u(p),v(p)\} & (5.5.4) \end{cases}$$

的唯一解。

其证明仿§3.

类似地，可推广 定理5.3.11为：

定理5.5.3 $G_\infty(p)$中的min max是$\underset{\mathrm{I}}{\mathrm{Vex}}\underset{\mathrm{I}}{\mathrm{Cav}}\,u(p)$而其max min是$\underset{\mathrm{I}}{\mathrm{Cav}}\underset{\mathrm{I}}{\mathrm{Vex}}u(p)$。

证明仿§3.

§4中关于序列对策的结果也可作相应推广，如定理5.4.2可推广为：

定理5.5.4 $v_n(p)=\underset{I}{\mathrm{Cav}}\max\limits_{i} v_n^i(p)$

2.现研究信息矩阵 先看一边缺乏信息的情形。回顾§2，此处与§2中模型的差异是：现在局中人在每个阶段m关于双方的行动对(i_m,j_m)不再得到信息。确切地说，在对矩阵族A^k给定两个

补充的 $|I|\times|J|$ 的矩阵族 H_I^k 及 H_{II}^k，$k\in K$，其选择概率为 p，在阶段 O 与§2相同，而在阶段 m 以后若选择 k，并假设已执行了 (i_m,j_m)，便告诉甲 $H_I^k(i_m,j_m)$，告诉乙 $H_{II}^k(i_m,j_m)$。所有以上规则都是双方共知的。而信息矩阵可以泄露对手的行动或机会着的有关信息。

假设每个局中人能记住他自己前面已采取的行动，即

$$i\neq i'\Rightarrow H_I^k(i,j)\neq H_I^{k'}(i',j'),\qquad \forall\, k,k',j,j'$$

$$j\neq j'\Rightarrow H_{II}^k(i,j)\neq H_{II}^{k'}(i',j'),\qquad \forall\, k,k',i,i'$$

现将 H_I^k，$k\in K$ 的诸元素看作是 R^{H_I}的规范基，这里 H_I 是出现在 H_I^k 中不同元素的个数。类似地可解释 H_{II}^K. 这类模型首先是 Aumann 及 Maschler 提出的。而当 $H_I^k(i,j)=H_{II}^k(i,j)=(i,j)$，$\forall\, k,i,j$ 时便得到§2中讨论的情形。这种情形叫做标准信息的情形。与§2相比，其主要变化与 NR 策略有关。在§2中 NR 策略中对于得知信息的人在其使用信息时便会暴露其信息，但在这里却不再成立了。确切地说，这是由于信息矩阵之故。现在的问题是这两个概念中的那一个才更适当？回顾§2中的证明，应认为第二个概念更为确切。把信息泄露给乙起了关键作用，它们确定了后验概率 p_m 的序列。而§2中关于 G_n 的策略的确定也可推广于此，不过现在的 s_m^k 是由$(H_I)^{m-1}$到甲的(I上的)概率集中的函数，类似地可对乙作相应描述。

甲在 $G(p)$中的策略 σ 是 NR 策略的含义是若对乙的一切 τ 策略，$H_{II}^k(i_1,j_1)$及 k 关于由 p,σ 及 τ 而诱导的 $H_{II}\times k$ 上的概率是独立的。即 $p^k,p^{k'}>0$ 可推出对一切 i,j,h 有 $\mathrm{Prob}(H_{II}^k(i,j)=h\,|\,k)=\mathrm{Prob}(H_{II}^{k'}(i,j)=h\,|\,k')$ 或由 $p^k p^{k'}>0$ 推出 $\sum\limits_{i:H_{II}^k(i,j)=h}\sigma^k(i)=\sum\limits_{i:H_{II}^{k'}(i,j)=h}\sigma^{k'}(i)$ 对一切 h 及 j 成立。故在 H_{II}^k 的诸列上由 σ 所诱导出的概率与 k 无关，于是我们定义

$$NR_I(p)=\left\{\begin{matrix}\sigma|=(\sigma^k),\text{且 }\sigma^k\text{ 是 }K\text{ 上的一个概率，}\\ \text{它当 }p^k p^{k'}>0\text{ 时使 }\sigma^k H_1^k=\sigma^k H_1^{k'}\text{ 成立}\end{matrix}\right\}$$

这里 $e^k H_1^k$ 是在 H_1 上的概率的 $|J|$一向量。注意 $NR_I(P)$可以是空集，例如 $p^k, p^{k'}>0$，而所有在 H_1^k 中的字母与 $H_1^{k'}$ 中的字母均相异，便会出现此情形。然而对单纯形 P 的一切极点 p_0，$NR_I(p_0)$却是 I 上的所有概率的集，最后易见 $\mathrm{NR}_I(p)$为一凸紧集。现将对策 $G(p)$中甲的策略中限于取 $\mathrm{NR}_I(P)$策略的对策称为 $D(P)$，并把它的值记作 $u(P)$，并规定若 $NR_I(P)=\varnothing$，则 $u(P)=-\infty$，此时可把§2 中定理 5.2.10 中的(1)，(2)及定理 5.2.17 加以推广，即

定理 5.5.5(Aumann 及 Maschler) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(p)$及 $v_\infty(p)$均存在。且$\lim\limits_{n\to\infty} v_n(p)=v_\infty(p)=\mathrm{Cav}\ u(p)$。

证 略。

关于 v_n 的讨论与有关概念与§2 中相应内容相似，或作小修改，读者可参阅有关文献。

最后指出收敛速度的界为 $c/\sqrt{n}$，如 Zamir[1973]给出例子：$v_n(p)-\mathrm{Cav}u(p)=O(1/\sqrt[3]{n})$，而在 $k=2$ 时且 $H_1^k=H_1^{k'}$ 的情形，当$\forall\ p$，$\mathrm{NR}_I(p)=\varnothing$时，大多数收敛速度为 $O(1/n^{1/6})$，而在其他情形时为 $O(1/n^{1/4})$，注意 H_1^k 未在 $\mathrm{NR}_I(p)$的定义中出现，所以$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ 及 v_∞关于 H_1^k 是独立的，然而 v_n 却常随 H_1^k 而变动。

若设上述对策序贯的进行，甲先采取行动并使用混合策略(即甲先取 σ，乙了解 $\sigma^k H_1^k$，并设乙使用 τ，在阶段 1 时的支付将是 $\sum\limits_k p^k \sigma^k A^k \tau$)。若把这样的对策的值记作 $w(P)$，Kohlberg (1975)证明 $w_1(p)=w_n(p)=\mathrm{Cav}u(p)$。此结果是由如下之事实得到：在阶段 1 混合序列对策中泄露的信息实际上是乙期望在无限阶段对策 $G_\infty(p)$所获得的信息。

3. 再考察两边都缺乏信息时的信息矩阵。在一般情形下可建

立以下模型(记号均见本节)：

$$A^k, H_1^k, H_1^k, k \in K, p \in P, K^1, K^1$$

并设在阶段 O 与本节开头所建模型相同，而在阶段 m 之后甲(相应的，乙)知道 $H_1^k(i_m, j_m)$(相应的，乙知道 $H_1^k(i_m, j_m)$)。

关于此类情形尚无一般结果，也没有给出递归公式，Mertens 及 Zamir(1976)给出一个这类模型之例，证明存在 minmax 及 maxmin。但却不相同。

下面看两种特殊情形：(1)具对称信息的对策；(2)信息矩阵与 k 无关的对策。

先介绍对称信息对策。它对应于 $K^1=K^1=K$ 的情形(两边都缺信息，但没有关于个人的信息，两局中人只知道 p 的选取)。对一切 k，$H_1^k=H_1^k$，且当 $i\neq i'$ 或 $j\neq j'$ 时 $H^k(i,j)\neq H^k(i',j')$(即双方了解其对手先前的信息)。注意在这种情况下信息矩阵并未隐藏什么"行动"(即"着")，并且还会暴露 k 的信息，此时有如下结果：

定理 5.5.6(Kolhberg 及 Zamir)　在上述假设下 $\lim_{n\to\infty} v_n$ 及 v_∞ 均存在且相等。

定理的证明与具"吸收状态"(absorbing state)的重复对策的一般结果有关，这里吸收是指在支付矩阵中的一些元素是吸收的，其含义是一旦达到某个支付，那么剩下的所有阶段，元素都将是相同的值)。在这些对策中若局中人双方知道先前的"着"(即行动)，$\lim_{n\to\infty} v_n$ 及 v_∞ 存在，并且相等。上面定义的对策是这类对策的特殊情形，因在阶段 m 所宣布的字母与 k 无关(即对一切 k，$H^k(i,j)=H(i,j)$)，对策是简单的重复，而若不是上述情形，对策便将蜕变：此时 $K'=\{k; H^k(i,j)=H\}$，并且 p' 是 p 在 k' 上诱导出来的。

再看第二种情形，此时 $H_1^k=H_1$，$H_1^k=H_1$，均与 k 无关。可仿本节 1 确定 $NR_1(p)$ 及 $NR_1(p)$，但在这里上述集总是非空，且

与 p 无关。而在 $G_1(p)$ 中当甲(相应的,乙)限于 NR_1 策略(相应的,NR_1 策略)时对策的值为 $u(p)$,仿本节 I,§3 中大多数结果可在此推广,特别定理 5.5.2 及定理 5.5.3 可类似的推广,但证明更加复杂,而收敛速度为:

$$|v_n(p) - \mathrm{Cav}u(p)| \leqslant O(1/\sqrt[3]{n})$$

它是一种好的估计。

4. 正态分布及重复对策

回顾 §2,注意 §2 中一个例子:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

甲得知信息(标准的信息),利用定理 5.2.10 及引理 5.2.12 可得

$$\frac{C'(p)}{\sqrt{n}} \leqslant v_n(p) \leqslant \frac{C(p)}{\sqrt{n}}$$

于是问题从而变成是否有 $\sqrt{n}\,v_n(p)$ 收敛。

定理 5.5.7(Merten 及 Zamir,1976) 在此对策中 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\;v_n(p)=\Phi(p)$,且

$$\varnothing(p) = \frac{1}{\sqrt{2n}}\exp(-\frac{1}{2}x_p^2), \frac{1}{\sqrt{2n}}\int_{-\infty}^{x_p}\exp(-\frac{1}{2}x^2)\mathrm{d}x = p$$

这说明 $\sqrt{n}\,v_n(p)$ 的极限是正态分布的密度函数,为证 $\sqrt{n}\,v_n(p) \leqslant \Phi(p)$,可使用引理 5.2.8,它给出 $g_n(s_m,t_m) \leqslant E_m(|p_{m+1}-p_m|)$,其中 $(p^1,p^2)=(p,1-p)$,求取期望,可得

$$v_n(p) \leqslant \max_{\sigma}\frac{1}{n}E_{p},{\sigma_n}(\sum_{m=1}^{n+1}|p_{m+1} - p_m|)$$

但是 $v_n(p_m) \overset{def}{=\!=} \sum\limits_{m=1}^{n} E(|p_{m+1}-p_m|)$ 是鞅 p_m 的变差,它在[0,1]中有界,并具有期望 p,对这些鞅,将它记作 $X(p)$,Mertens 与 Zamir 证明(1977)

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{X(p)}\frac{1}{\sqrt{n}}v_n[Z(p)] = \Phi(P) \qquad (5.5.6)$$

由此可推出结论，而反向不等式可利用定理 5.2.11 及递推公式。于是 $\sqrt{n}\,v_n$ 可由满足类似的泛函方程的函数 w_n 使之劣化，并可推出$\liminf w_n(p)\geqslant\Phi(p)$，从而得出所要的证明。

由此推出与 $G_n(p)$ 中优策略有关的鞅确能达到(6.5.6)中的极大值。

5. 有限对策。考虑具有有限规范型不完全信息的所有二人零和对策(例如一切上述的 G_n，其对策具有几乎完全信息，…)，从而它的值可象求解线性规划那样求得，例如在独立的情形，利用记号：$x_i^k=\text{Prob}(\text{采用 } i\mid k)$，$y_j^r=\text{Prob}(\text{采用 } j\mid r)$，$m^{kr}(i,j)$为支付，此时有

定理 5.5.8(Ponssard 及 Sorin，1978)　$v(p,q)$是下述规划

$$\begin{cases}\max\limits_{x,v}\sum\limits_{r} q^r v^r \\ s.t.\ \sum\limits_{i,k} p^k x_i^k m^{kr}(i,j)\geqslant v^r, & \forall\ j,r \\ \sum\limits_{i} x_i^k = 1, & \forall\ k, \\ x_i^k\geqslant 0, & \forall\ i,k\end{cases} \qquad (5.5.7)$$

的解。

由此结果可推得：

定理 5.5.9　$v(p,q)$关于 p 是凹的而关于 q 是凸的，且为逐段双线性(即存在关于 P 与 Q 的两个凸多面体的划分(p^l)及(Q^m)，使 v 关于每个 $p^l\times Q^m$ 的限制是双线性的。)

定理可推广于独立情形，并且允许在具有几乎完全信息的对策中构造双方的优策略，每个局中人可使用类似于引理 5.2.13 中依赖于抽签的方式，但它也阻止自己使用来自对手的信息。这样给出为每个局中人构造两个条件概率及线性流形的序列，他们的期

望能保证每个阶段的值。

重复对策还有许多研究课题，如计算复杂性，有长期合同的重复谈判对策，耗散重复对策等，并已应用在经济研究之中，可以说重复对策已成为对策论中一个吸引人的研究课题。

参 考 文 献

[1] Aumann R J, Maschler M. Repeated Games in Incomplete. Information. A survey of Recent Results Mathematica. Chapter Ⅱ, 1967

[2] Aumann R J, Maschler M, Stearns R E. Repeated Games of Incomplete Informations: An Approach to the Non—Zero—Sum Case. Mathematica. Chapter Ⅳ, 1968

[3] Kohlberg E . Optimal Strategies in Repeated Games of Incomplete, Information, International Journal of Game Theory, Vol. 4, 1975: 7—24

[4] Kohlberg E. The Information Revealeted in Infinitely Repeated Games of Incomplete Information International Journal of Game Theory (Vol. 4), 1975: 57—59

[5] Ehud Kalai, William Stanford. Finite Rationality and interpersonal Complexity in Repeated Games Econometrica. Vol. 56, 1988 (2)

[6] Mertens J F, Zamir S. The value of Two Person Zero—Sum Repeated Games with Lack of Information on Both Sides. International Journal of Game Theory, Vol. 1

[7] Mertens J F, Zamir S. On a Repeated Game without a Recursive Structure. International of Game Theoty. Vol. 5, 1976: 173—182

[8] Mertens J F, Zamir S. The minimax and Maxmin of Repoeated Games with Incomplete Information Core Discussion paper. No. 7742, 1977

[9] Ponssard J P. Zero Sum Games with Almost Perfect Information Manaqemenl Science. Vol, 21

[10] Ponssard J P. On the Subject of Non Optimal Play in Zero—Sum Ex-

tensive Games : The Trap Phenomenon. International Tournal of Game Theory. Vol. 5, 1976: 107—115

[11] Ponssard J P, Zamir S. Zoro Sum Sequential Games with Incomplete Information. International Journal of Game Theory. Vol. 2, 1973: 99—107

[12] Sorin S. A Note on the Value of Zero Sum Sequential Repeated Games with Incomplete. Information International Journol of Game Theory. Vol. 8

[13] Zamir S. On the Relation Between Finitely and Infinitely Repeated Games with Incomplete Information. International Journal of Game Theory. Vol. 1

[14] Zamir S. On Repeated Games with General. Information Fwnction. International Journal of Game Theory. Vol. 2

[15] Sorin S. *An Introduction to Two-Person Zero Sum Repeated Games* with Incomplete Information Tech Report (No. 312). Stanford University, 1980

[16] Mertens J F. Repeated Games CORE (No. 8624), 1986

[17] Sorin S. Supergames in Game Theory and Applications. Edited by T Ichiishi A Neynar. Y. Tauman. Academic Press Inc., 1990: 46—63

[18] Ehud Kalai Bounded Rationality and Strategic Complexity in Repeated Games. Edited by T Ichiishi A Neynar. Y. Tauman. Academic Press Inc., 1990: 131-157

第六章　n 人对策

从本章开始的以后五章里，我们将把注意力引向多人对策。我们要把第三章的有关概念和理论推广到这种更加一般的情形，但仅仅这些推广还远远构不成多人对策理论的全部。在现实生活里，二人与三人具有质的不同：在三人的情况下有少数服从多数的概念，每个局中人都要考虑是否与另外两局中人的一个（或两个）合作起来联合行动，这就使联盟这一概念在多人的情况下变得至关重要。正是这一概念导致了多人合作对策理论的产生。研究在允许合作的情况下各局中人的行为就构成了本章及以后四章的主要内容。

§1　非合作的情形：Nash 平衡点

本节我们把非合作双矩阵对策的有关理论推广到 n 人的情形，主要问题仍然是平衡点的概念、其存在性和算法。

n 人（正规型）对策包括如下三个因素：

i）局中人集合 $N=\{1,2,\cdots,n\}$；

ii）各局中人的策略集 $X^1,X^2,\cdots,X^n$；

iii）n 个实值函数 $P_1,P_2,\cdots,P_n$（称为支付函数），其中 $P_i(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 表示当局中人 1 采用策略 x^1，局中人 2 采用策略 x^2，$\cdots$，局中人 n 采用策略 x^n 时，局中人 i 所得到的支付。

这样一个 n 人对策记为 $\Gamma=(N,\{X^i\},\{P_i\})$.

n 重策略组(或称局势) $x=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$ 称为对策 Γ 的平衡点或平衡局势,如果对于每个 $i\in N$,

$$P_i(x)=\max_{y^i\in X^i} P_i(x|y^i),$$

其中 $x|y^i=(x^1,\cdots,x^{i-1},y^i,x^{i+1}\cdots,x^n)$ 表示在局势 x 之下局中人 i 偏离了 x^i 而采用 y^i,其它局中人所用策略都不变时所得到的新局势。换言之,一个局势是平衡局势,如果任何单个局中人,在其他局中人都要维持这一局势的情况下,都无法通过改变其自身的策略使自己获利更多。

定理 6.1.1 对于 n 人对策 $\Gamma=(N,\{X^i\},\{P_i\})$,如果对于每一 $i\in N$ 下面三个条件成立:

(a) X^i 是某欧氏空间上的紧凸集;

(b) P_i 是 $X^1\times X^2\times\cdots\times X^n$ 上的连续函数;

(c) 对于每一个固定的 $x^1\in X^1\cdots,x^{i-1}\in X^{i-1},x^{i+1}\in X^{i+1},\cdots,x^n\in x^n$, $P_i(x^1,\cdots,x^{i+1},x^i,x^{i+1},\cdots,x^n)$ 是 X^i 上的凹函数,则 Γ 的平衡局势一定存在。

证 记 $X=X^1\times X^2\times\cdots\times X^n$,由条件(a),$X$ 是某欧氏空间上的紧凸集。现在 X 上定义集值映射 D:

$$D(x)=D_1(x)\times D_2(x)\times\cdots\times D_n(x)$$

其中

$$D_i(x)=\{y^i\in X^i|P_i(x|y^i)=\max_{z^i\in X^i} P_i(x|z^i)\}$$

容易看出,x 是 Γ 的平衡局势当且仅当 x 满足 $x\in D(x)$. 因此,只需验证 D 满足 Kakutani 不动点定理的所有条件。

首先,从定理的条件可知 $D_i(x)$ 是 X^i 的非空闭凸子集,从而 $D(x)$ 是 X 的非空闭凸子集。其次,设 $(x_n,y_n)\to(x,y)$,且 $y_n\in D(x_n)$, $n=1,2,\cdots$ 由 D 的定义

$$P_i(x_n|y_n^i)\geqslant P_i(x_n|z^i),\quad \forall z^i\in X^i,\forall i\in N$$

上式两边取极限，并利用 P_i 的连续性，得

$$P_i(x|y^i) \geqslant P_i(x|z^i), \quad \forall z^i \in X^i, \forall i \in N$$

这表明 $y \in D(x)$，因而也就证明了 D 的上半连续性。至此，Kakutani 定理的条件全部验毕。

以后，我们只局限于讨论各局中人都只有有限个策略的对策 $\Gamma=(N,\{S_i\},\{P_i\})$，其中 S_i 表示 i 的（有限）策略集。显然，定理 8.1.1 不适用于这种场合。但是，类似于二人的情形，可以把纯策略集 S_i 扩充为混合策略集 S_i^*，它是 S_i 上的概率分布（可用 $|S_i|$ 维向量来表示）的全体，再用各局中人采用混合策略时局中人 i 得到的期望支付 P_i^* 代替 P_i，这样就把对策 Γ 扩充成允许各局中人采用混合策略的对策 $\Gamma^*=(N,\{S_i^*\},\{P_i^*\})$，称为 Γ 的混合扩充。

定理 6.1.2(Nash)　任何 n 人对策 $\Gamma=(N,\{S_i\},\{P_i\})$ 都有混合策略的平衡点（称为 Nash 平衡点）。

这是定理 6.1.1 的直接推论，因为这时的 $X^i=S_i^*$ 是欧氏空间中的单纯形，支付函数关于每个（混合）策略变量都是线性的。

关于 Nash 平衡点的计算，可以把 Lemke 和 Howson 的补转轴法推广到 n 人的情形，但迄今为止，这方面的所有推广都毫不例外地牵涉到非线性方程组的求解，因而也就无法导出一个切实有效的计算方法。

例　考虑这样一个三人对策：每个局中人都从 $\{H,T\}$ 中选取策略，当只有一个局中人选 H 时，该局中人所得支付为 1；当只有一个局中人选 T 时，该局中人所得支付为 2；在所有其它情况下局中人所得支付均为 0.

在这个三人对策里，局中人 1 的支付函数可写成两个 2×2 矩阵。

$$H:\ \begin{matrix} & H & T \\ H & 0 & 0 \\ T & 0 & 1 \end{matrix}, \qquad T:\ \begin{matrix} & H & T \\ H & 2 & 0 \\ T & 0 & 0 \end{matrix}$$

分别表示局中人1采用策略 H 和 T 时对应得到的四个支付，其中行对应于局中人2的策略，列对应于局中人3的策略。局中人2和3的支付函数同样可用这两个2×2矩阵来表示。不难验证，当三个局中人都采用混合策略（$\sqrt{2}-1,2-\sqrt{2}$）时，就达到平衡局势，而且这是唯一的平衡局势。

上例表明，以有理数为支付的对策也有可能以无理数的混合策略局势为其唯一的平衡点。从计算的角度来看，这无疑是由求解非线性方程组所致。

§2 合作的情形:特征函数

在现实生活中，合作往往会给人们带来好处，所以人与人、单位与单位、党派与党派甚至国家与国家之间都要考虑相互合作的可能性。在多人对策中，一般的情况是：一些局中人看到与他人合作的好处，积极寻求与别人合作的机会；又有些局中人可能由于无法与他人沟通或其它原因不得不单独行动。为了便于研究，我们限于考虑两种极端的情形。如果各局中人互不沟通、都单独行动，那么所得的就是多人非合作对策，这已在上一节作了研究。现在我们考虑另一种极端情形，即合作的情形。这时各局中人都在寻找一切能使自己有利可图的与别人合作的机会。

在只有两个局中人的情况下，问题比较简单，因为每个局中人要么与对方合作，要么单独行动，只有两种选择。但当局中人数大于2时，情况就不再象多人非合作对策那样与二人的情形没有太大的差别。就拿三人合作对策为例，每个局中人都要考虑是单独行动，与其他两人中的一人合作还是三人共同合作。不仅如此，他还得考虑当他被其余合作在一起的两局中人排斥在外时，是否有必要通过向其中一人略施小惠，以使之背信弃义，另寻新的合作伙

伴。

由此可见，在合作对策中，首先要遇到联盟的概念（它表示一部分局中人所成的集合）。对各局中人来说，重要的不是他在其策略集中选取一个什么样的策略，而是与哪些人联合在一起统一协调行动。所以，在这种情况下再用对策的正规型或展开型来研究多人合作对策就很不方便。我们需要引入对策的第三种形式——特征函数型。

以下，我们取局中人集合为 $N=1,2,\cdots,n$，N 的任意子集称为联盟，所有联盟的全体记为 $\mathscr{P}(N)$。

定义6.2.1 n 人对策的特征函数是指定义在 $\mathscr{P}(N)$上的一个实函数 v，其中 $v(S)$表示联盟 S 通过协调其成员的策略所能保证得到的最大赢得。

按照这一定义，自然有

$$v(\varnothing)=0 \qquad (6.2.1)$$

当 n 人对策可用正规型表示为$(N,\{S_i\},\{P_i\})$时，其特征函数就是

$$v(S)=\max_{x\in X_S}\min_{y\in X_{N-S}}\sum_{i\in S}P_i^*(x,y),$$

其中 X_S 表示 S 中全部成员的联合混合策略的全体，X_{N-S}是 $N-S$ 中全部成员的联合混合策略的全体。若 S,T 是两个不相交的联盟，则它们联合在一起时的赢得至少有两者单独行动时双方赢得的和那么多，因此

$$v(S\cup T)\geqslant v(S)+v(T),\quad S\cap T=\varnothing \qquad (6.2.2)$$

特征函数的这一性质称为超加性(superadditivity)。

当用特征函数来研究 n 人合作对策时，实际上作了这样的假定，即各局中人都用相同的尺度来衡量他们的赢得。以后还要假定各联盟的赢得 $v(S)$可以按任意方式分摊给各参加者。这两个假设统称为旁支付假设。没有这种假设的多人合作对策称为 NTU 对

策(Nontransferable Utility Game),其理论要比现在的困难得多,我们将在第十章加以论述。

n 人对策(特征型)就是指定义在 $\mathscr{P}(N)$ 上满足(6.2.1)和(6,2,2)的实函数,记为 (N,v),在不引起混淆的情况下,也记为 v.

条件(6.2.2)并不是非要不可,它只是特征函数原始定义的直接推论。一般的文献并不要求它成立,因为合作对策的绝大部分内容并不依赖于超加性。在以后的论述中,我们将清楚地看到这一点。在这一章,我们暂时假定(6.2.2)是满足的。

例1　局中人1(卖主)有一匹马,对他自己来说,其价值为0,而对局中人2和3(买主)来说分别价值90和100个货币单位(在下面的叙述中略去货币单位)。

这里共有三个局中人。如果1把马以 X 的价格卖给2,则1获利 X,2获利 $90-X$,故联盟{1,2}的总收入为90,所以

$$v(\{1,2\}) = 90$$

同样,

$$v(\{1,3\}) = 100$$

另一方面,单个局中人或两个买主联合在一起都没能得益,所以

$$v(\{i\}) = v(\{2,3\}) = 0$$

最后,三个局中人合作在一起时,马必然卖给局中人3,因为只有这样才能获得联盟的最大效益,所以

$$v(\{1,2,3\}) = 100.$$

例2　假设每个局中人都有一包垃圾,它必须扔在某人(可能是他自己)的院子里。如果某人院子里扔了 b 包垃圾,他就得花 kb 个货币单位来处理,其中 k 是正常数。

对于这个对策,如果联盟 S 中的各成员合作起来,他们就可以把所拥有的所有垃圾扔在联盟之外成员(如果有)的院子里。但 S 也得从坏处着想,作好接受联盟之外所有垃圾的准备。所以

$$v(S)=\begin{cases}0, & 当\ |S|=0;\\ -k(n-|S|), & 当\ 0<|S|<n;\\ -kn, & 当\ |S|=n.\end{cases}$$

一般地，如果 $v(S)$仅与 S 的元素个数有关，则称 v 为对称对策。

还有几类常见的对策：

如果 v 满足

$$v(S)+v(N-S)=v(N) \qquad (6.2.3)$$

则称之为常和对策。

如果 $v(S)$只取两个值0和1，且单个局中人所得为0，大联盟 N 所得为1，则称 v 为简单对策。对于简单对策，特征函数取值为1的联盟称为赢联盟或取胜联盟(winning coalition)，而取值为0的联盟称为输联盟或失败联盟(losing coalition)。简单对策适用于和政治有关的问题，这时 $v(S)$一般不再表示联盟 S 的得益，而表示 S 能否取胜。一种常见的简单对策是所谓的加权多数对策，可表示为

$$v(S)=\begin{cases}0, & \sum_{i\in S}W_i<Q\\ 1, & \sum_{i\in S}W_i\geqslant Q\end{cases}$$

其中 $W_1,W_2,\cdots,W_n$ 和 Q 是固定的非负整数，通常表示各局中人所拥有的票数和取胜应该达到的票数。于是，上式指的就是只有当 S 中的票数总和达到或超过 Q 时，S 才能取胜(如某法案获得通过，等等)。这种对策也记为$(Q;W_1,W_2,\cdots,W_n)$。

如果对任意的 $S,T\subset N$，

$$v(S)+v(T)\leqslant v(S\cup T)+v(S\cap T) \qquad (6.2.4)$$

则称 v 为凸对策，以后将经常遇到这种对策。为理解“凸”的含意，引入差分算子$\triangle_R$：

$$[\triangle_R v](S)=v(S\cup R)-v(S-R)$$

并用$\triangle_{QR}v$ 表示$\triangle_Q(\triangle_R v)$。容易验证，(6.2.4)等价于

$$[\triangle_{QR}v](S)\geqslant 0,\quad \forall\, Q,R,S\subset N$$

这类似于分析中实凸函数二阶导数的非负性。

设 μ 是 N 上的非负测度（即非本质对策），f 是凸函数，则由

$$v(S)=f[\mu(S)]$$

定义的对策是凸对策（为什么？），称为凸测度对策。特别地，设 $(C_1, C_2,\cdots,C_n)\in R_+^n$，$p\geqslant 1$，则由

$$v(S)=\left(\sum_{i\in S}C_i\right)^p$$

定义的对策是凸对策。

对于一般的 n 人合作对策，需要研究如下两个基本而又重要的问题：第一，联盟的形成，即可能形成什么样的联盟。这是一个复杂的问题，决非三言两语所能解决。例如在上面的例1中，可能形成的联盟有{1,3}，{1,2}和{1,2,3}。二人联盟的缺点是被排除在外的第三者可能会设法（比如以更高的报酬作引诱）把1从现有联盟中拉出来与自己合作；三人联盟也有问题，因为它的收入与联盟{1,3}相同，局中人2肯定要受到排挤。为了便于研究，我们假定，一个联盟一旦形成，它就在整个对策过程中保持稳定。第二个问题是支付的分配，即当联盟形成后，联盟所得支付如何分配给它的各个参加者。分配的合理与否非常重要，因为一旦某些局中人发现自己受到不合理的待遇，已经形成的联盟就有破裂的危险。所以，要维持业已形成的联盟的稳定，支付的分配应满足一定的合理性。

§3 策略等价

合作对策的局中人都应从联盟的收入中分得各自的份额，我们用 n 维向量 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$ 来表示，称为支付向量，其中 x_i 表示第 i 个局中人所得的份额。

满足

$$x_i \geqslant v(\{i\}), \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{6.3.1}$$

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \tag{6.3.2}$$

的支付向量称为对策 v 的分配。分配的全体用 $E(v)$表示。

(6.3.1)称为个体合理性条件，它表明每个局中人所得至少有他单干时的所得那么多。(6.3.2)称为群体合理性条件，它相当于假定大联盟 N 形成。作这一假定基于两方面的考虑：第一，在满足超加性，甚至是凸性的假设下，假定各局中人合作成最大的联盟看来最为合理，这是因为如果 N 分解成若干个互不相交的联盟 N_1，N_2，…，N_k，则根据超加性，按后面这种合作方式各小联盟所得的总和不超过最大联盟的收入，即

$$v(N) \geqslant v(N_1) + v(N_2) + \cdots + v(N_k)$$

第二，假定 N 形成也只是为了方便。如果真正形成的联盟不是 N，而是上面提到的 N_1，N_2，…，N_k，则同样可以定义类似的分配概念，这只要将(6.3.2)改成

$$\sum_{i \in N_j} x_i = v(N_j), \quad j = 1,2,\cdots,k \tag{6.3.3}$$

即可，而由此导出的理论与我们即将建立的理论没有实质的差异。因此，今后所论的各种解的概念都基于满足(6.3.1)和(6.3.2)的分配集合 $E(v)$之上。

有时，也把仅仅满足(6.3.2)的支付向量称为预分配，其全体记为 $E^*(v)$。

应该选取 $E(v)$中的哪一个支付向量作为最后的分配方案呢？这个问题一般说来是很困难的，除非 $E(v)$只由一个分配组成。但这是非常特殊的情形。为说明这一点，我们称满足

$$v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\}) \tag{6.3.4}$$

的对策为本质对策。如果(6.3.4)的不等号变成等号(不可能反向)，则称相应的对策为非本质对策。

显然，当 v 是非本质对策时，总共只有一个分配存在，所以这是一种平凡的情形。以后主要感兴趣的是本质对策，在这种情况下，$E(v)$就不止一个分配，且构成 R^n 中的闭凸集。

设 x、y 是两个不同的分配。如何比较两者的优劣呢？对此各局中人不可能有统一的意见，因为对于某些局中人 i 来说，$x_i>y_i$，于是对他们而言，x 比 y 好。但对另一些局中人来说，y 要比 x 好。在此情况下，能否实现分配 x 就要看满足 $x_i>y_i$ 的那些局中人之全体 S 在没有其他人合作的情况下能否为其各成员实现分配 x 了。因此，我们引入如下的定义。

定义6.3.1 对于分配 x 和 y 及联盟 S，如果

$$x_i > y_i, \quad \forall i \in S$$

$$\sum_{i \in S} x_i \leqslant v(S)$$

则称 x 关于 S 优超 y，记为 $x \underset{S}{\succ} y$.

对于两个不同的分配 x 和 y，如果存在联盟 S 使 $x \underset{S}{\succ} y$，则称 x 优超 y，记为 $x \succ y$.

优超关系是定义在分配集上 $E(v)$ 上的一种序关系，但他不满足反身性和传递性，因而对于它的研究就远远没有一般的偏序关系方便。

两个合作对策(N,v)和(N,u)称为同构的，如果存在从 $E(u)$ 到 $E(v)$的一一对应 $f:E(u)\to E(v)$使得对于任何联盟 S 及 $x,y \in E(u)$，

$$x \underset{S}{\succ} y \Longleftrightarrow f(x) \underset{S}{\succ} f(y).$$

对策(N,v)与(N,u)称为策略等价的，如果存在正数 α 及实数 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 使

$$u(S) = \alpha v(S) + \sum_{i \in S} \beta_i, \quad \forall S \subset N$$

显然，同构和策略等价关系都满足一般等价关系均满足的反

身性、对称性和传递性。二者有什么关系呢?

首先，如果对策 u 和 v 策略等价，则它们一定同构。为说明这一点，取一一对应关系 $f:E(u)\to E(v), x\to y$，其中 $y_i=\alpha x_i+\beta_i$. 容易证明，f 和 f^{-1} 都保持优超关系不变。

其次，这一结论的逆也成立，但证明要困难一些，已超出本书的范围，读者可参看[10]。因此，我们得到

定理6.3.1 两个对策同构当且仅当它们策略等价。

按照上述两种(实际是一种)等价关系，所有的 n 人合作对策可以分成一些等价类。在每个等价类里取出有代表性的一个对策加以研究就可以了。

对策 v 称为(0,1)规范对策，如果

$$v(\{i\})=0,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{6.3.5}$$

$$v(N)=1 \tag{6.3.6}$$

如果只要求满足(6.3.5)，则称之为0规范对策。

显然，(0,1)规范对策都是本质的。反过来，如果(N,u)是一本质对策，则方程组

$$\alpha v(\{i\})+\beta_i=0,\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$\alpha v(N)+\sum_{i\in N}\beta_i=1$$

的唯一解

$$\alpha=\frac{1}{v(N)-\sum_{i\in N}v(\{i\})}$$

$$\beta_i=-\alpha v(\{i\}),\qquad i=1,2,\cdots,n$$

满足 $\alpha>0$. 由此马上得到

定理6.3.2 每一本质对策都恰好与一个(0,1)规范对策策略等价。

因此，在本质对策所在的等价类中，总是可以选出一个(唯一的)(0,1)规范对策作为该等价类的代表元。同样可以定义(a,b)规

范对策并导出类似的结论，但就我们的目的而言，(0,1)规范对策已经够用了。

§4 核　心

从本节开始，我们研究支付的分配问题，着重考虑如何在分配集中选择一个或一些分配作为对策的解。为了书写方便，在不致引起混淆的情况下，简记$\sum_{i\in S} x_i$为$x(S)$，这也是对策论文献中经常使用的记号。

对于 n 人合作对策(N,v)，分配集 $E(v)$中不被任何分配优超的分配，其全体称为核心，记为$C(N,v)$或$C(v)$.

核心是合作对策理论中出现得最早的解的概念，它在对策论中占有非常重要的地位。把核心中的分配作为对策的解是可行的，因为即使有某联盟 S 喜欢另一分配 y，也会由于 $y(S)>v(S)$而无法将 x 改变为 y. 换言之，核心中的分配使得任何联盟都没有能力推翻它。核心还有一个简捷直观的表达式，它对于实际求出一个对策的核心是极其有用的。

定理6.4.1　核心$C(v)$可表示为满足

$$x(S) \geqslant v(S), \quad \forall S \subset N \tag{6.4.1}$$

$$x(N) = v(N) \tag{6.4.2}$$

的支付向量 x 的全体。

证明　如果 x 满足(6.4.1)和(6.4.2)，则它显然不可优超。现设 x 是一个不可优超的分配，则(6.4.2)成立。假如对于某 $S\subset N$ 有 $x(S)<v(S)$，则令

$$y_i = \begin{cases} x_i + \varepsilon, & i \in S \\ v(\{i\}) + \alpha, & i \bar{\in} S \end{cases}$$

其中

$$\varepsilon = \frac{v(S) - x(S)}{|S|} > 0,$$

$$\alpha = \frac{v(N) - v(S) - \sum_{i \in N-S} v(\{i\})}{n - |S|} \geqslant 0.$$

显然，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in E(v)$，$y_i>x_i$，$\forall\ i\in S$，且 $y(S)=v(S)$. 因此，$y\succ x$，这与 x 不可优超矛盾，定理得证。

注：如果超加性条件(6.2.2)不满足，则上述定理不再成立。在一般的对策论文献里，往往直接按(6.4.1)和(6.4.2)来定义核心，这时(6.4.1)称为联盟合理性条件。

从这个定理还可以看到，核心是闭凸集。如果对策的核心非空，就可以将总收益 $v(N)$ 按这样一种方式分配给各局中人，使之不仅满足个体合理性和群体合理性，而且还满足联盟合理性，即任何联盟在这种分配方式下的所得都不小于它独立出来时的所得，因而也就没有能力拒绝这样的分配，除非联盟中有人同意让自己的所得变小。

但是，把核心中的分配作为合作对策的解，一个致命的缺陷是核心经常是空的，这从以下几个例子也可看出。

例1　考虑常和的本质对策 (N,v)。如果 x 是核心中的分配，则

$$\begin{aligned} v(N) = x(N) &= \sum_{i\in N}[x(N) - x(N - \{i\})] \\ &\leqslant \sum_{i\in N}[v(N) - v(N - \{i\})] \\ &= \sum_{i\in N} v(\{i\}) \end{aligned}$$

这与 v 是本质对策矛盾。所以常和本质对策的核心是空的。

例2　考虑三人(0,1)规范对策 (N,v)，其中 $v(23)=a_1$，$v(13)=a_2$，$v(21)=a_3$. 这里及以后我们省去有关集合的繁琐记号，如简

记$\{i,j\}$为ij.

核心可表示为

$$\begin{aligned}C(v)=&\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_i\geqslant 0,x_1+x_2+x_3=1,\\&x_1+x_2\geqslant a_3,x_1+x_3\geqslant a_2,x_2+x_3\geqslant a_1\}\\=&\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_i\geqslant 0,x_1+x_2+x_3=1,\\&x_i\leqslant 1-a_i,i=1,2,3\}\end{aligned}$$

从这里可以看出，$C(v)\neq\varnothing$当且仅当$a_1+a_2+a_3\leqslant 2$.

若用单位边长的正三角形表示这个对策的分配集：

$$E(v)=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_i\geqslant 0,x_1+x_2+x_3=1\}$$

其中x_1,x_2,x_3分别为三角形上的点到三边的距离，则核心可表示为图6.4.1的阴影部分。

例3　设(N,v)是简单对策。局中人i称为该对策的一个否决人(veto player)，如果$v(N-i)=0$. 可以证明，$C(v)$非空当且仅当v有否决人。

事实上，若i为否决人，则第i个单位向量e_i(即只有第i个分量为1其余分量都为0的向量)必在核心中。反之，假定$C(v)\neq\varnothing$，但v没有否决人，即

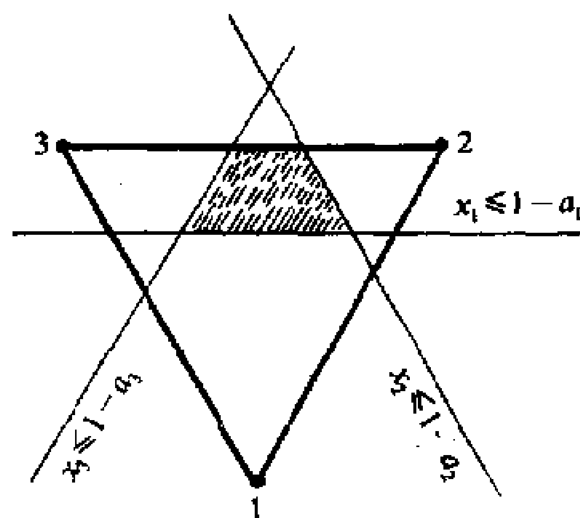


图6.4.1

$$v(N-i)=1,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

则对于任一 $x\in C(v)$，我们有

$$x(N)=1,$$

$$x(N-i)\geqslant v(N-i)=1.$$

于是 $x_i\leqslant 0, i=1,2,\cdots,n$，进而推得 $x(N)\leqslant 0$，矛盾。

既然一般的合作对策核心有可能是空的，一些具有非空核心的合作对策类就引起了人们的兴趣。除了在第十二章即将遇到的与经济有关的一些对策外，凸对策也属于这一类对策。

定理6.4.2 对于凸对策 (N,v)，如令

$a_1=v(\{1\})$

$\cdots$

$a_k=v(\{1,2,\cdots,k\})-v(\{1,2,\cdots,k-1\})$

$\cdots$

$a_n=v(N)-v(N-\{n\})$

则 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in C(v)$。特别地，凸对策的核心非空。

证 显然，$a(N)=v(N)$。任取 $S\subset N$，下面证明 $a(S)\geqslant v(S)$。

记 $N-S=\{j_1,j_2,\cdots,j_t\}$，其中

$$j_1<j_2<\cdots\cdots<j_t$$

取 $T=\{1,2,\cdots\cdots,j_1\}$，则有

$$S\cup T=S\cup\{j_1\},\quad S\cap T=T-\{j_1\}$$

于是，由凸性不等式

$$v(S)+v(T)\leqslant v(S\cup\{j_1\})+v(T-\{j_1\})$$

或

$$a_{j_1}\leqslant v(S\cup\{j_1\})-v(S)$$

所以

$$a(S)-v(S)\geqslant a(S\cup\{j_1\})-v(S\cup\{j_1\})$$

重复上述推理 t 次，得到

$$a(S)-v(S)\geqslant a(N)-v(N)=0$$

定理得证。

定理6.4.2所得的支付与局中人的编号次序有关。如果换成另外一种编号(相当于对1,2,…,n 作一次重新排列),如将3,1,2,4,5,…,n 分别称为1′,2′,…,n',就会得到核心中的另一个分配。当取遍所有的编号时,就得到核心中许许多多的分配。因此,可以将上面的定理改成更加一般的形式:

定理6.4.2′ 设(N,v)是凸对策,ω 是1,2,…,n 的任一排列,记

$$S_{\omega,k} = \{i \in N \mid \omega(i) \leqslant k\}$$

则 $a^{\omega}=(a_1^{\omega},a_2^{\omega},\cdots,a_n^{\omega})\in C(v)$,其中

$$a_i^{\omega} = v(S_{\omega,\omega(i)}) - v(S_{\omega,\omega(i)-1}), \quad i \in N$$

在本节的最后,我们介绍两个与核心有关的概念,即强 ε-核心和最小核心。

对于合作对策(N,v),定义一簇新的对策(N,v_ε):

$$v_\varepsilon(S) = \begin{cases} v(S), & S = N,\varnothing; \\ v(S) - \varepsilon, & S \neq N,\varnothing, \end{cases}$$

v 的强 ε-核心就是 $C(v_\varepsilon)$,即满足

$$x(N) = v(N),$$
$$x(S) \geqslant v(S) - \varepsilon, \quad S \neq N,\varnothing$$

的支付向量之全体,记为$C_\varepsilon(v)$. 显然,当 ε 充分大时,$C_\varepsilon(v)$非空。令 ε_0为这种 ε 中的最小者,即

$$\varepsilon_0 = \inf\{\varepsilon \mid C_\varepsilon(v) \neq \varnothing\}$$

则容易看出,$C_{\varepsilon_0}(v) \neq \varnothing$,这个 ε_0—核心称为最小核心(least core)记为 LC

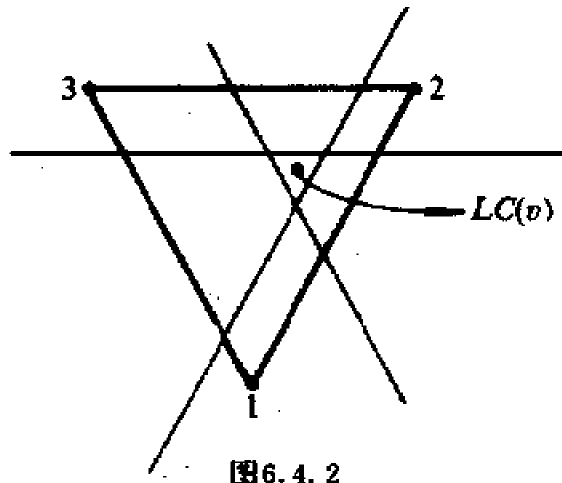


图6.4.2

(v).

例如，对于例2中的三人合作对策，如果三直线 $x_1=1-a_1$、$x_2=1-a_2$、$x_3=1-a_3$在分配集上围成三角形，则最小核心 $LC(v)$就是该三角形的重心，如图6.4.2所示。

§5 Bonderava—Shapley 定理

核心作为解的概念，其美中不足之处是它经常是空的。什么样的对策具有非空的核心呢?如何刻划这种对策?这是本节要研究的问题。

根据上节的定理6.4.1，合作对策 v 的核心非空等价于存在 $x\in R^n$，满足(6.4.1)和(6.4.2)。这等价于线性规划问题：

$$\min\ x(N)$$
$$\text{st.}\quad x(S)\geqslant v(S),\quad S\subset N \tag{6.5.1}$$

的最优值为 $v(N)$。根据线性规划中的对偶定理，这与其对偶问题

$$\max \sum_{S\subset N} y_S\, v(S) \tag{6.5.2}$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{S,i\in S} y_S=1,\quad i\in N \tag{6.5.3}$$
$$y_S\geqslant 0 \tag{6.5.4}$$

的最优值不超过 $v(N)$等价。因此有

定理6.5.1 对策(N,v)具有非空的核心的充要条件是对于满足(6.5.3)和(6.5.4)的每一组向量$\{y_S\}_{S\subset N}$，都有

$$\sum_{S\subset N} y_S\, v(S)\leqslant v(N) \tag{6.5.5}.$$

满足定理6.5.1条件的对策称为均衡对策。还有一种与均衡有关的对策，称为完全均衡对策(totally balanced game)，它指的是，不仅对策本身(N,v)是均衡的，而且它的每个子对策$(S,v|_S)$也是

均衡对策，这里 $v|_S$ 是 v 限制在 S 上时所得的函数。我们将在第九、十二章再次遇到完全均衡对策。

满足(6.5.3)和(6.5.4)的向量$\{y_S\}$显然有很多。对所有这种向量来验证不等式(6.5.5)可不是一件简单的事。但很明显，这些不等式中有很多是多余的。为去掉多余的不等式，我们没法找出对偶规划(6.5.2)—(6.5.4)之可行集的所有极点(即凸集的顶点)。为此，先引入

定义6.5.1 设 $s=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$是 N 上的一组非空子集所成之类。s 称为 N-均衡的(在不引起混淆的情况下简称均衡)，如果存在正数 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 使得对一切 $j\in N$，都有

$$\sum_{i;j\in S_i} y_i = 1$$

其中 $(y_1,y_2,\cdots,y_m)$称为 s 的均衡向量、均衡系数或权向量，y_i 称为 S_i 的权。如果均衡类 s 的任何真子类都非均衡，则称之为极小均衡类。如果一极小均衡类的任何两个元素都相交，则称之为正常极小均衡类。

例1　N 的任一剖分都是极小均衡类，权都为1。所以极小均衡类可视为剖分的推广。

例2　设 $N=\{1,2,3\}$，则$\{12,13,23\}$是均衡类，而且是 N 上除了剖分之外唯一的极小均衡类，权都为1/2。一般地，对于 n 人集合 N，$\{N-1,N-2,\cdots,N-n\}$是均衡类，且各元素之权均为$1/(n-1)$。

例3　设 $N=\{1,2,3,4\}$，则$\{123,14,24,34\}$是 N 上的正常极小均衡类，其权向量为(2/3,1/3,1/3,1/3)。

例4　设 $y=\{y_S\}$，$S\subset N$ 是满足(6,5,3)和(6,5,4)的一个向量，则 $b=\{S\mid y_S>0\}$是均衡类。

极小均衡类作为一个组合对象，迄今尚未得到足够的研究(参看[7]和[6])。就与对策论有关的问题而言，找出 N 上所有的极小

均衡类尤为重要。但对于稍大的 n(如 $n=7$)，尚未有可行的方法做到这一点。下面从均衡类的一些基本性质开始。

引理6.5.2 均衡类 $b=\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$是极小均衡类当且仅当它有唯一的权向量。

证 首先注意到，x 是 b 的权向量当且仅当它的各分量为正，且为方程组

$$\sum_{i:j\in B_i} x_i = 1, j = 1,2,\cdots,n \qquad (6.5.6)$$

的解 b 不是极小的当且仅当(6.5.6)有一非负解，使得在该解中至少有一个分量取值为0.

假定 b 有唯一的权向量，则(6.5.6)有唯一解，且各分量为正。所以 b 必为极小均衡类。

反过来，假如 b 有两个均衡向量 $y,z,y\neq z$，则对任何 t，$y_t=y+t(y-z)$都是(6.5.6)的解。令

$$t_0 = inf\{t\,|\,y + t(y - z) \geqslant 0, t > 0\},$$

则 y_{t_0}非负且必有一个分量为零。因此，b 不是极小的。

从上述证明中还可以发现，均衡类 b 是极小的当且仅当方程组(6,5,6)有唯一解。这也等价于相应的矩阵(称为 b 的关系矩阵)的秩为 m. 因此，极小均衡类至多含 n 个集合。

引理6.5.3 设 $y=\{y_S\}_{S\subset N}$满足(6.5.3)和(6.5.4)。令

$$b = \{S\,|\,y_S > 0\}$$

则 b 是极小均衡类当且仅当 y 是对偶规划(6.5.2)—(6.5.4)之可行集 D 的极点。

证 显然，b 是均衡类。如果它不是极小的，则存在 b 的真子类 $C=\{S_1,S_2,\cdots,S_t\}$，它是均衡类，且以$(z_1,z_2,\cdots,z_t)$为权向量。令 $z=\{z_S\}_{S\subset N}$，其中

$$z_S = \begin{cases} z_i, & S \text{ 为某个 } S_i \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则 $z\in D$，再作

$$w=(1-t)y+tz=y+t(z-y),$$
$$w'=(1+t)y-tz=y+t(y-z).$$

由于当 $z_S>0$时必有 $y_S>0$，故对于充分小的 $t>0$，必有 $w,w'\in D$. 又由 $y\neq z$ 知 $w\neq w'$. 最后

$$y=\frac{1}{2}(w+w')$$

这表明 y 不是极点。

另一方面，设 b 是极小均衡类。如果 y 不是 D 的极点，则 y 可表示为

$$y=\frac{1}{2}(w^1+w^2)$$

其中 $w^1,w^2\in D, w^1\neq w^2$. 显然，当 $y_S=0$时，$w_S^1=w_S^2=0$，再令

$$b_1=\{S|w_S^1>0\}$$
$$b_2=\{S|w_S^2>0\}$$

则 $b_1,b_2\subset b$，且都是均衡类。由于 b 是极小的，故 $b_1=b_2=b$，再根据引理6.5.2，$w^1=w^2=y$，矛盾。定理得证。

由于线性规划(6.5.2)—(6.5.4)的最优解必在其可行集 D 的极点达到，根据引理 6.5.3得

定理6.5.4(Bonderava)　合作对策(N,v)的核心非空当且仅当对于每一极小均衡类 $s=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$及其唯一的权向量$(y_1,y_2,\cdots,y_m)$，有

$$\sum_{i=1}^{m}y_i v(S_i)\leqslant v(N) \tag{6.5.7}$$

定理6.5.4对于不满足超加性条件的对策显然也成立(此时核心按定理6.4.1中的等价条件来定义，见该定理之后的注)，但对于满足超加性条件的对策，(6.5.7)中尚有许多多余的不等式。为进一步去掉这种不等式，还需了解均衡类的另一性质。

引理6.5.5　s 是均衡类当且仅当它是一些极小均衡类的并。

证 充分性：只要证明两个均衡类的并仍为均衡类即可。设

$$b = \{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$$

$$c = \{C_1, C_2, \cdots, C_l\}$$

都是 N-均衡类，y，z 分别为其权向量。记

$$s = b \cup c = \{S_1, S_2, \cdots, S_p\}$$

任取 $t \in (0,1)$，令

$$w_i = \begin{cases} ty_i, & S_i \in b - c \\ (1-t)z_i, & S_i \in c - b \\ ty_i + (1-t)z_i, & S_i \in c \cap b \end{cases}$$

则易知 $(w_1, w_2, \cdots, w_p)$ 是 s 的权向量，因此 s 是均衡类。

必要性：设

$$s = \{S_1, S_2, \cdots, S_p\}$$

是均衡类，$(W_1, W_2, \cdots, W_p)$ 是 s 的一个权向量。任取 $S_i \in s$，我们没法找到一个极小均衡类 $b \subset s$ 使得 $S_i \in b$，这样也就完成了必要性的证明。

不妨设 $i=1$，考虑线性规划问题

$$\max x_1$$

$$\text{s.t} \sum_{i:S_i \in j} x_i = 1, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

$$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, p$$

其最优解必在某极点 $(y_1, y_2, \cdots, y_p)$ 处达到，其中 $y_1 \geqslant w_1 > 0$，令

$$b = \{S_i \mid y_i > 0\}$$

显然，$b \subset s$，$S_1 \in b$，而且 b 是极小均衡类（其证明与引理8,5,3的证明的前半部分相同）。证毕。

定理6.5.6(Shapley) 如果对策 (N, v) 满足超加性，则其核心非空当且仅当对于每一正常的极小均衡类 $s = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$ 及其唯一的权向量 $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$，(6.5.7)成立。

证 根据定理6.5.4，只需证明在所述条件之下，(6.5.7)对所

有的极小均衡类都成立。用反证法，假定有某些极小均衡类不满足(6.5.7)，下面设法由此推出矛盾。

对每一极小均衡类 s，用 $f(s)$ 表示 s 中不相交的(无序)集合偶的总数。例如，在 $N=\{1,2,3,4\}$ 的极小均衡类 $s_0=\{12,23,13,4\}$ 中，不相交的无序集合偶有(12,4)，(23,4)和(13,4)，所以，$f(s_0)=3$.

令 b 为所有不满足(6.5.7)的极小均衡类 s 中使 $f(s)$ 达到最小的那一个。由定理的条件，b 不是正常的，因而 $f(b)>0$，b 及其权向量 y 还不满足(6.5.7)。

任取 b 中一对不相交的集合 Q 和 R，不妨设相应的权系数 y_Q 和 y_R 满足 $y_Q\leqslant y_R$，令 $T=Q\cup R$，由 b 的极小性知道 $T\overline{\in}b$. 现作新的集类

$$b^1=\begin{cases}b\cup\{T\}-\{Q\}, & y_Q<y_R\\ b\cup\{T\}-\{R,Q\}, & y_Q=y_R\end{cases}$$

我们先证明 b^1满足：

i) b^1是均衡类；

ii) b^1是极小的；

iii) $f(b^1)<f(b)$.

i) 在 b^1中，T 赋以权 y_Q，R 如果属于 b^1，则赋以权 y_R-y_Q，b^1的其它集合则赋予与在 b 中相同的权。显然，这样赋予各集的权使 b^1 达到均衡。

ii) 假如 b^1不是极小的，则由引理6.5.5，可取极小均衡类 $c\subset b^1$，使它满足 $R\in c$(如果 $R\in b^1$)。由于 b 是极小的，T 必为 c 的一个元素。再作集类

$$c^1=(c-\{T\})\cup\{R,Q\}$$

易知 $c^1\subset b$，且 c^1是均衡的，这只要将 T 在 C 中的权转移给 R 和 Q 就可以了 。因此，由 b 的极小性知 $c^1=b$，所以

$$b\cup\{T\}-\{Q\}=C\cup\{R\}$$

由此及关于 $R\in c$ 的假定可得

$$c=\begin{cases}b\cup\{T\}-\{Q\}, & R\in c\\ b\cup\{T\}-\{R,Q\}, & R\bar{\in} c\end{cases}$$
$$=b^1$$

这与 b^1 不是极小矛盾。

iii)对于 b^1 中任一不相交的集合偶，如果它不在 b 中，则必具有形式 (S,T)，与之相对应的也有一对不相交的集合 (S,Q)，它在 b 但不在 b^1 中。另外，b 还有一对不相交的集合 (R,Q)，它不在 b^1 中。由此可见，$f(b^1)<f(b)$，iii)得证。

根据这些结论及 b 的取法知道，b^1 的权向量 z 满足(6.5.7)，即

$$\sum_{B\in b^1} z_B v(B)\leqslant v(N).$$

而从 b^1 的定 义，有

$$\sum_{B\in b^1} z_B v(B)=\sum_{B\in b} y_B v(B)+y_Q v(T)-y_Q v(Q)-y_Q v(R).$$

因此，由超加性得

$$\sum_{B\in b} y_B v(B)\leqslant\sum_{B\in b^1} z_B v(B)\leqslant v(N)$$

这与 b 不满足(6.5.7)矛盾。定理得证。

值得指出的是，定理6.5.6的结论不能再加改善了，因为已经有人证明该定理中所要求的那些不等式都是相互独立的。

例5 设 $N=\{1,2,3\}$，这时正常的极小均衡类只有{12,23,13}。因此，三人合作对策核心非空的充要条件是

$$v(12)+v(23)+v(13)\leqslant 2v(123)$$

例6 对于 $N=\{1,2,3,4\}$，正常的极小均衡类有

{123,124,34}，{123,14,24,34}，{123,124,134,234}

权向量分别为 (1/2,1/2,1/2)，(2/3, 1/3, 1/3,1/3)，(1/3,1/3,1/3,1/3)。其余正常极小均衡类均可通过局中人的重新编号从上述三个得到，总共有8个。因此，四人对策的核心非空的充要条件是

相应的11个不等式成立。特别地，如果 v 是(0,1)规范的四人对称对策，且当 $|S|=s$ 时，$v(S)=v_s$，则其核心非空的充要条件是

$$v_3 \leqslant \frac{3}{4}$$

$$v_2 + 2v_3 \leqslant 2$$

$$3v_2 + 2v_3 \leqslant 3$$

同时成立。

§6 稳定集

把核心作为对策的解，存在着不可克服的困难：有许多对策的核心是空的。因此，寻求其它类型的解的概念就变得异常急需。在对策论的历史上，Von Neumann 和 Morgenstern 曾提出稳定集的概念，并将其称为对策的"解"。

定义6.6.1 设 V 是合作对策 (N,v) 的一些分配的集合。

i)如果 V 中任何两个分配都没有优超关系，则称之为内部稳定的(internal stable)。

ii)如果对于 V 之外的任一分配 y，都有 $x\in V$ 使得 x 优超 y，则称 V 为外部稳定的(external stable)。

既是内部稳定又是外部稳定的分配集合称为稳定集。

按照这个定义，在一稳定集 V 中添入一些 V 之外的分配，则内部稳定性受到破坏；从中去掉一些分配，则外部稳定性受到破坏。因此，不同的稳定集一定互不包含，而且稳定集既是极大的内部稳定集，又是极小的外部稳定集。

所有分配的集合 $E(v)$ 是外部稳定的，但一般不满足内部稳定性。核心显然是内部稳定的，但一般不满足外部稳定性，这也是核心的另一个缺陷。另外，如果核心非空(它是不被优超的分配之全

体)，就一定包含在每一稳定集中。所以，如果核心本身是一个稳定集，它就是唯一的稳定集。

对于分配 x，记 dom$x$ 为被 x 优超的分配之全体。对于一些分配的集合 v，记

$$\mathrm{dom}\ V = \bigcup_{x\in V} \mathrm{dom}\ x$$

那么，V 的内部稳定性等价于

$$\mathrm{dom}\ V \subset E(v) - V$$

而外部稳定性等价于

$$\mathrm{dom}\ V \supset E(v) - V$$

因此，V 是稳定集当且仅当

$$\mathrm{dom}\ V = E(v) - V \qquad (6.6.1)$$

所以稳定集相当于某个“映射”的不动点。沿用这种记号，核心还可表示为 $C(v)=E(v)-\mathrm{dom}E(v)$

稳定集这一概念在五六十年代曾吸引了一大批杰出的数学家。曾有大量的文献致力于寻找一些特殊对策(如三人对策、简单对策、对称对策、市场对策等)或具有特殊性质(如对称性、有限性等)的稳定集。关于稳定集的计算和存在性的判别，迄今尚无一种通用的方法。其实，稳定集是否始终存在这一问题曾经是对策论中的一个著名难题。直到1968年，Lucas[4]得出一个没有稳定集的十人对策，存在性问题才有了否定的答案。

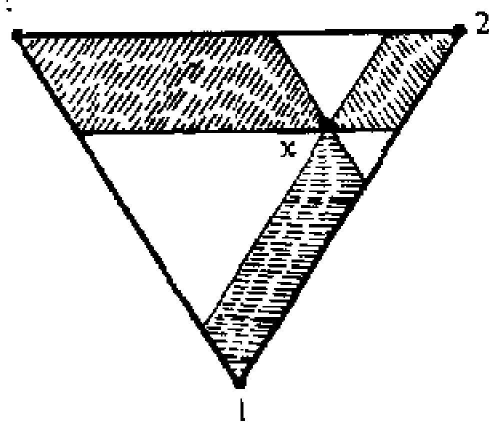


图6.6.1

例1 考虑(0,1)规范的三人常和对策(N,v)，即

$$v(S) = \begin{cases} 1, & |S| \geqslant 2 \\ 0, & |S| \leqslant 1 \end{cases}$$

分配集 $E(v)$ 用单位正三角形表示(见第四节例2),对于任一分配 x、$\mathrm{dom}\,x$ 可用图 6.6.1中的阴影部分来表示,它由三个半开半闭的平行四边形组成。

令 $V_0=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right),\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$

即 V_0 为三边中点之集合(见图 6.6.2),则显然 V_0 满足(6.6.1),所以它是稳定集。

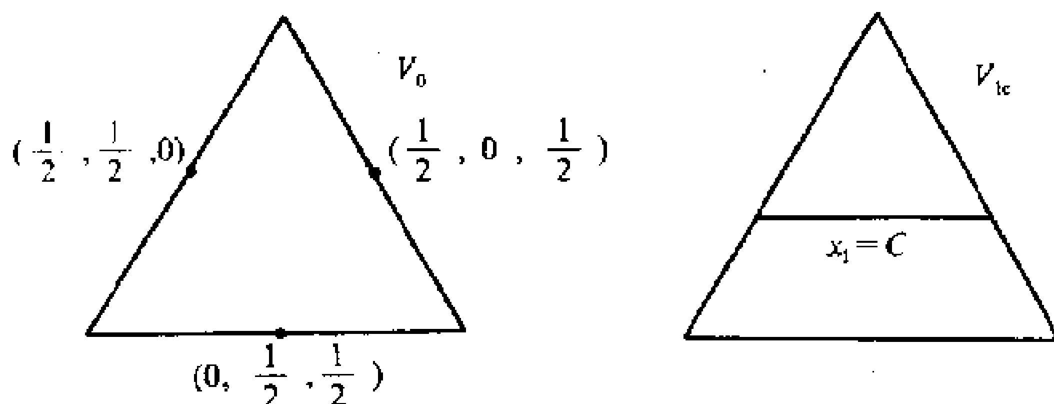


图6.6.2

再设 $c\in[0,\frac{1}{2})$,令

$$V_{1c}=\{(c,x_2,1-x_2-c)\mid \ 0\leqslant x_2\leqslant 1-c\}.$$

它表示平行于 $x_1=0$ 并与之相距为 c 的线段(如图6.6.2右边的三角形所示)。易见 V_{1c} 也满足(6.6.1),所以也是 v 的稳定集。

同样可定义 V_{2c},V_{3c},$\left(c\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\right)$,它们都是稳定集。

这个例子表明,即使是最简单的三人本质对策,也可能有大量性态各异的稳定集。对于一般的三人合作对策,情况更加复杂(见 Owen[5],第九章)。由此足见有关稳定集之研究的困难。

例2 考虑如下十人对策 (N,v):

$$v(N)=5,$$

$$v(13579)=4,$$

$$v(3579)=v(1579)=v(1379)=3,$$

$$v(1479) = v(3679) = v(2579) = 2,$$
$$v(357) = v(157) = v(137) = 2,$$
$$v(359) = v(159) = v(139) = 2,$$
$$v(12) = v(34) = v(56) = v(78)$$
$$= v(\{9,10\}) = 1,$$

对于其它 S，$v(S) = 0.$

Lucas 在[4]中证明了这个对策没有稳定集。

但是，读者不难发现，这个对策并不满足超加性。为弥补这一缺陷，作 v^1：

$$v(S) = \max[v(T_1) + v(T_2) + \cdots + v(T_k)]$$

其中 max 是对 S 的所有部分 $\{T_1,T_2,\cdots,T_k\}$ 来取。显然，

$$v'(N) = 5,\quad v'(i) = 0,\quad i \in N$$

所以 $E(v)=E(v')$，另一方面，我们不难看到，v 和 v' 有相同的优超关系，从而它们有相同的稳定集。就本例来说，我们由此断言，v' 没有稳定集。

尽管形式简单的对策具有相当复杂的稳定集，但仍有相当多的对策，其稳定集只有一个，即非空的核心，这是稳定集最简单的情形，有时也称这样的对策是“可解的”。

定理6.6.1 设 (N,v) 是凸对策，则核心是唯一的稳定集。

证 只要证明核心 $C(v)$ 满足外部稳定性就够了。

任取 $x\notin C(v)$，设 S_0 是满足 $x(S_0)<v(S_0)$ 的极小联盟。又取 M 为充分大的正数，例如

$$M > \max_{S\subset N} v(S) + \sum_{i\in N}|x_i| \tag{6.6.2}$$

再作 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$：

$$y_i = \begin{cases} x_i + \dfrac{v(S_0) - x(S_0)}{|S_0|}, & i \in S_0 \\ M, & i \notin S_0 \end{cases}$$

由 S_0的极小性及 M 的取法，有

$$y(S) \geqslant v(S), \quad \forall S \subset N \tag{6.6.3}$$

作对策(N,w)，其中

$$w(S) = v(S) - y(S)$$

假定能找到一点 $z \in C(w)$，使得 $z \leqslant 0$. 那么 $y' = z + y \in C(v)$，于是

$$v(S_0) \leqslant y'(S_0) = z(S_0) + y(S_0)$$
$$\leqslant y(S_0) = v(S_0)$$

由此得到 $z(S_0)=0$，从而 $z_i=0, \forall i \in S_0$. 因此，

$$y_i' = y_i > x_i, \quad \forall i \in S_0$$
$$y'(S_0) = v(S_0)$$

这表明核心中有一个分配 y'，使得 y' 优超 x.

尚须证明存在 $z \in C(w)$使 $z \leqslant 0$，为此，作对策 w'：

$$w'(S) = \max_{T \supset S} w(T)$$

因为 $w(\varnothing)=0$，且 $w \leqslant 0$，所以 $w'(\varnothing)=0$，这表明 w' 的确是一个对策。另外，它还是凸的。这是因为：对于任意的 $S,T \subset N$，有 $S' \supset S, T' \supset T$ 使

$$w'(S) = w(S'), \quad w'(T) = w(T')$$

再由凸性不等式及 w' 的定义，得

$$\begin{aligned} w(S) + w(T) &= w(S') + w(T') \\ &\leqslant w(S' \cup T') + w(S' \cap T') \\ &\leqslant w'(S \cup T) + w'(S \cap T) \end{aligned}$$

因此，利用定理6.4.2，存在 $z \in C(w')$。由于 $w' \geqslant w, w'(N) = w(N)$，故也有 $z \in C(w)$。最后由

$$z(N-i) \leqslant w'(N-i) \leqslant w(N) = w'(N) = z(N)$$

知 $z_i \leqslant 0, i=1,2,\cdots,n$. 定理得证。

定理6.6.2 设(N,v)是任一合作对策。现定义(N,v^M)：

$$v^M(S) = \begin{cases} v(N) + M, & S = N \\ v(S), & S \neq N \end{cases}$$

则当 M 充分大时，$C(v^M)$是 v^M 唯一的稳定集。

这个结论表明，当大联盟 N 的收益足够大时，对策是“可解的”。定理的证明与定理6.6.1的前半部分类似，留作练习。

参 考 文 献

[1] Aubin J P. Mathematical Methods of Games and Economic Theory. North-Holland, 1979

[2] Aumann R, Dreze J. Cooperative game with coalition structure. Intern. J. Game Theory, 1974 (3): 217—237

[3] Ichiishi T. Comparative cooperative game theory. Intern. J. Game Theory, 1990 (19): 139—152

[4] Lucas W. A game with no solution. Bull. Amer. Math. Soc., 1968 (74): 237—239

[5] Owen G. Game Theory. Second edition. Academic Press, 1982

[6] Peleg B. An inductive method for constructing minimal balanced collection of finite sets. Naval Research Logistics Quarterly, 1965 (12): 155—162

[7] Shapley L S. On balanced sets and cores. Naval Research Logistics Quarterly, 1967 (14): 453—460

[8] Shapley L S. Cores of convex games. Intern. J. Game Theory, 1971 (1): 11—26

[9] Sharkey W. Cooperative games with large cores. Intern. J. Game Theory, 1982 (11): 175—182

[10] Tijs S H. On Sequivalence and isomorphism of games in characteristic function form. Intern. J. Game Theory, 1975 (4): 209—210

[11] Weber R. Noncooperative games. Game Theory and its Applications. Rhode Island, Providence, Amer. Math. Soc., 1981

第七章　Shapley 值和谈判集

上一章我们针对多人合作对策引入两个解的概念，即核心与稳定集。这两者的一个共同缺陷是存在性得不到保证。为弥补这一不足，本章将顺着历史的足迹，介绍五六十年代发展起来的 Shapley 值和谈判集等概念。这些概念作为合作对策的解，一个共同的特性是它们始终是存在的。

§1　Shapley 值

我们暂时撇开上一章提出的各种合理性要求来考虑支付的分配问题。设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 是局中人集合，特征函数为 v. 同样假定各局中人都同意合作在一起形成最大的联盟 N. 如何将联盟的收入分配给各局中人？一种很自然的方法是根据各局中人给联盟带来的增值来分配，即

$$
\begin{aligned}
x_1 &= v(1), \\
x_2 &= v(12) - v(1), \\
x_3 &= v(123) - v(12), \\
&\cdots \\
x_n &= v(N) - v(N-n).
\end{aligned}
$$

（这里仍省略有关集合的记号。）但是，这样一种分配方案与局中人的编号次序有关：例如，如果把局中人 $n,n-1,\cdots,2,1$ 分别叫作

$1', 2', \cdots, n'$，那么就得到一个新的分配方案：

$$x_1' = v(n),$$
$$x_2' = v(n, n-1) - v(n),$$
$$\cdots$$
$$x_{n-1}' = v(N-1) - v(N-12),$$
$$x_n' = v(N) - v(N-1).$$

对于局中人的其它编号次序，也可按这种考虑联盟增值的办法得到相应的分配方案。由于 n 个局中人的编号方法总共有 $n!$ 种，所以这样的分配方案也有 $n!$ 种。作为对各局中人"平均"贡献大小的衡量，取这 n 个分配的平均值，得到

$$\varphi_i(v) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi}[v(S_\pi^i \cup i) - v(S_\pi^i)], \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{7.1.1}$$

其中求和对$1, 2, \cdots, n$ 的所有排列 π 进行，S_π^i 表示在排列 π 中排在 i 之前的那些局中人构成的联盟，即

$$S_\pi^i = \{j \mid \pi j < i\}. \tag{7.1.2}$$

(7.1.1)的和式中有许多相同的项，为将这些项合并在一起，按 $N-i$ 的子集将排列分类，将满足 $S_\pi^i = S$ 的排列归为同一类，该类所含排列共有 $s!(n-s-1)!$ 个，其中 $s = |S|$. 于是(7.1.1)右边可写成

$$\frac{1}{n!}\sum_{S\subset N-i}\sum_{S_\pi^i = S}[v(S_\pi^i \cup i) - v(S_\pi^i)]$$
$$= \sum_{S\subset N-i}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup i) - v(S))$$

因此

$$\varphi_i(v) = \sum_{S\subset N-i}\frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S\cup i) - v(S)) \tag{7.1.3}$$

(7.1.3)也可用另一种方法来导出，这就是 Shapley 的公理方法。为说明这种方法的来源，我们回顾一下第四章第三节所论的二人谈判问题。针对这种更一般的二人合作问题，Nash 提出了一组看起来都合乎情理的公理，然后从这一组公理导出谈判问题的唯一解，即 Nash 解。把这样一种方法移植到现在要考虑的 n 人合作对策，就是我们即将论述的 Shapley 公理方法。

为讨论方便，把特征型的 n 人合作对策(不一定满足超加性)之全体记为 G。G 按照通常的加法和数乘运算构成线性空间。而且，由于每个对策由 2^n-1 个数 $\{v(S)\mid S\subset N\}$ 完全确定，故 G 的维数是 2^n-1.

对于 G 中的任一对策 v，各局中人通过协商和讨论最后定出一个各方都能接受的支付向量 $x\in R^n$ 作为分配方案。由 v 到 x 的这样一个过程可看作从 G 到 R^n 的一个映射 φ:

$$\varphi(v) = (\varphi_1(v),\varphi_2(v),\cdots,\varphi_n(v))$$

$$\varphi_i(v) = x_i,\quad i = 1,2,\cdots,n$$

为说明 φ 应该满足的几个公理，我们先引入

定义7.1.1 设 $v\in G$, $T\subset N$. 如果

$$v(S) = v(S\cap T),\quad \forall\, S\subset N$$

则称 T 为对策 v 的一个载体(carrier)。

显然，载体常常不是唯一的。如果 T 是载体，$T_1\supset T$，则 T_1 也是载体。

载体之外的局中人相当于"哑元"(dummy)，他对任何联盟都可有可无，没有任何贡献。

定义7.1.2 设 π 是 N 的一个排列，即 N 上的一个一对一映射，$v\in G$. 对策 πv 定义为

$$(\pi v)(S) = v(\pi S),\quad \forall\, S\subset N$$

πv 相当于更改局中人的编号之后所得的对策。

现在可以叙述 φ 应该满足的三个公理了。

公理1 （有效性）如果 T 是对策 v 的一个载体，则

$$\sum_{i\in T}\varphi_i(v)=v(T)$$

公理2（对称性） 对于 N 的任一排列 π，有

$$\varphi_{\pi i}(\pi v)=\varphi_i(v)$$

公理3（可加性） 如果 $u,v\in G$，则

$$\varphi_i(u+v)=\varphi_i(u)+\varphi_i(v)$$

在这三个公理中，有效性公理表示分配支付时不必把"哑巴"考虑在内。对称性公理要求，当局中人的编号改变时，他分配所得的份额不受影响。比较容易引起争议的是可加性公理。这里牵涉到两个对策的和，相当于 n 个人同时独立进行两个对策，而每个联盟的收益刚好是两个对策分别进行时的收益之和。于是可加性公理可表述为，局中人在和对策中分配得的份额是在两个分对策中分配得的份额的和。

定理7.1.1(Shapley) 存在唯一的映射 $\varphi:G\to R^n$，满足上面三个公理，而且这个唯一的 φ 由(7.1.3)给出。

$\varphi_i(v)$称为局中人 i 的 Shapley 值。

证 不难验证，由(7.1.1)定义的 φ 满足上面三个公理。为证明唯一性，设 φ 是 G 上满足公理1—3的 n 维向量函数。先证明两个引理：

引理7.1.2 设 $T\subset N$，定义对策 w_T 如下：

$$w_T(S)=\begin{cases}1, & S\supset T\\ 0, & S\not\supset T\end{cases}$$

又设 c 是实数，则

$$\varphi_i(cw_T)=\begin{cases}0, & i\overline{\in} T\\ \dfrac{c}{|T|}, & i\in T\end{cases}\tag{7.1.4}$$

证 当 $i\overline{\in} T$ 时，T 和 $T\cup i$ 都是 cw_T 的载体。由公理1，

$$\sum_{j\in T}\varphi_j(cw_T)=w(T)=w(T\cup i)$$
$$=\sum_{j\in T\cup i}\varphi_j(cw_T)$$
$$=\sum_{j\in T}\varphi_j(cw_T)+\varphi_i(cw_T)$$

故 $\varphi_i(cw_T)=0$.

再任取 $i,j\in T$，由公理2我们知道（只要更换 i 和 j 的位置），

$$\varphi_i(cw_T)=\varphi_j(cw_T)$$

所以由公理1，

$$|T|\varphi_i(cw_T)=c,\quad i\in T$$

因此，

$$\varphi_i(cw_T)=\frac{c}{|T|},\quad i\in T$$

引理7.1.3 任一对策 v 都可表示为

$$v=\sum_{T\subset N}c_Tw_T \tag{7.1.5}$$

其中 w_T 如引理7.1.2所定义，c_T 由下式定义

$$c_T=\sum_{U\subset T}(-1)^{|T|-|U|}v(U) \tag{7.1.6}$$

证 任取 $S\subset N$，将(7.1.6)代入(7.1.5)，交换求和次序，作如下计算：

$$\left(\sum_{T\subset N}c_Tw_T\right)(S)=\sum_{T\subset N}c_T\,w_T(S)$$
$$=\sum_{T\subset S}C_T=\sum_{T\subset S}\sum_{U\subset T}(-1)^{|T|-|U|}v(U)$$
$$=\sum_{U\subset S}\left(\sum_{U\subset T\subset S}(-1)^{|T|-|U|}\right)v(U)$$
$$=\sum_{U\subset S}\left[\sum_{t=|U|}^{|S|}(-1)^{t-|U|}\binom{|S|-|U|}{t-|U|}\right]v(U)$$
$$=\sum_{U\subset S}(-1)^{|S|-|U|}v(U)$$

$$= v(S)$$

证毕。

下面接着证明定理7.1.1.根据公理3及(7.1.5),得

$$\varphi_i(v) = \sum_{T\subset N}\varphi_i(c_T w_T)$$

再由引理7.1.2,

$$\varphi_i(v) = \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} \frac{c_T}{|T|} \tag{7.1.7}$$

至此已可导出唯一性。但为了用另一种方法导出公式(7.1.3),可继续进行计算。

改变(7.1.7)的求和变量,将(7.1.6)代入、交换求和顺序,得

$$\begin{aligned}\varphi_i(v) &= \sum_{S\subset N-i} \frac{c_{S\cup i}}{|S\cup i|}\\ &= \sum_{S\subset N-i} \frac{1}{|S\cup i|}\sum_{T\subset S\cup i}(-1)^{|S\cup i|-|T|}v(T)\\ &= \sum_{T\subset N}\Bigg[\sum_{\substack{S\cup i\supset T\\ S\subset N-i}} \frac{(-1)^{|S\cup i|-|T|}}{|S\cup i|}\Bigg]v(T)\\ &= \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}}\Bigg[\sum_{T-i\subset S\subset N-i} \frac{(-1)^{|S|-|T-i|}}{|S|+1}\Bigg]v(T)\\ &\quad + \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}}\Bigg[\sum_{T\subset S\subset N-i} \frac{(-1)^{|S|-|T|+1}}{|S|+1}\Bigg]v(T).\end{aligned}$$

改变上式右边第一项的求和变量(以 T 换 $T-i$),再同类合并,得

$$\begin{aligned}\varphi_i(v) &= \sum_{T\subset N-i}\ \sum_{T\subset S\subset N-i} \frac{(-1)^{|S|-|T|}}{|S|+1}[v(T\cup i)-v(T)]\\ &= \sum_{T\subset N-i} y_i(T)[v(T\cup i)-v(T)]\end{aligned} \tag{7.1.8}$$

其中

$$y_i(T) = \sum_{T\subset S\subset N-i} \frac{(-1)^{|S|-|T|}}{|S|+1}$$

可作如下计算：

$$y_i(T)=\sum_{s=|T|}^{n-1}=\frac{(-1)^{s-|T|}}{s+1}\binom{n-1-|T|}{S-|T|}$$
$$=\sum_{s=|T|}^{n-1}(-1)^{s-|T|}\binom{n-1-|T|}{S-|T|}\int_0^1 x^s \mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\left[\sum_{s=|T|}^{n-1}(-1)^{s-|T|}\binom{n-1-|T|}{S-|T|}x^s\right]\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 x^{|T|}(1-x)^{n-1-|T|}dx \tag{7.1.9}$$

这是著名的第一型欧拉积分，值为

$$\frac{\Gamma(|T|+1)\Gamma(n-|T|)}{\Gamma(n+1)}=\frac{|T|!(n-|T|-1)!}{n!}$$

代入(7.1.8)即得(7.1.3)。

虽然 Shapley 值的公式(7.1.3)比(7.1.1)更为简捷，但在很多场合用(7.1.1)较为方便。该式还可以按下面的“随机顺序”来解释：假定各局中人已商定在某时某地集合在一起。由于受随机因素的影响，他们的到达还是有个先后次序，但我们假定各种可能的到达次序都具有相同的概率，即$1/n!$。如果当局中人 i 到达的时候，发现已先前到达的人构成联盟 S，那么 i 的加入使联盟的收益从 $v(S)$增加到 $v(S\cup i)$，于是他从中得到支付 $v(S\cup i)-v(S)$，Shapley 值 $\varphi_i(v)$就是在上面这种随机机制下局中人 i 所得的期望支付。

与“随机顺序”的解释相对应，还可以用“随机联盟”来解释 Shapley 值。为看清这一点，令

$$R_i(t)=\sum_{S\subset N-i}t^{|S|}(1-t)^{n-|S|-1}[v(S\cup i)-v(S)] \tag{9.1.10}$$

由(7.1.8)和(7.1.9)，局中人 i 的 Shapley 值可写为

$$\varphi_i(v) = \int_0^1 R_i(t)\mathrm{d}t \qquad (7.1.11)$$

现设 $t\in[0,1]$，假定各局中人都以概率 t 来参加对策，那么联盟 $S\subset N-i$（即 i 已决定不参加）是一个“随机联盟”，它形成的概率是 $t^{|S|}(1-t)^{n-|S|-1}$。因此，$R_i(t)$是在这种随机机制下局中人 i 对其它可能形成之联盟的贡献的期望值。由于对策进行时并没有指定 t 的值，所以取 $R_i(t)$关于 t 的平均值作为局中人 i 应得的份额，而这正是(7.1.11)的积分。

应当指出，在 Shapley 值中，“哑元”所得为0，这按哑元的定义是完全合理的。另一方面，虽然 Shapley 值按照各局中人的贡献大小来分配支付，体现了某种程度的“公平”与“合理”，但这种分配方案未必能为各局中人接受，因为在一般情况下，Shapley 值向量不一定是分配，即 $\varphi(v)$不一定满足

$$\varphi_i(v) \geqslant v(i) \qquad (7.1.12)$$

然而，如果对策满足超加性（实际上只需满足 $v(S\cup i)\geqslant v(S)+v(i),\forall\, i\notin S$ 即可)，那么 $\varphi(v)$必为分配。这是因为从(7.1.1)可直接推出(7.1.12)。

在对策仅仅满足超加性的情况下，Shapley 值向量未必属于核心。这就是说，可能有这样的联盟 S 存在，使得它有力量拒绝接受按 Shapley 值给予的份额。但是，下面的定理表明，当对策满足凸性条件时，Shapley 值向量一定处于核心当中。所以在这种情况下，Shapley 值不仅衡量了各局中人的“平均”贡献，而且提供的分配还具有联盟稳定性。

定理7.1.4 如果 v 是凸对策，则 $\varphi(v)\in C(v)$。

证 从(7.1.1)、核心的凸性及定理6.4.2直接推出。

例1 二人对策的 Shapley 值为

$$\varphi_1(v) = \frac{v(1)+v(12)-v(2)}{2},$$

$$\varphi_2(v) = \frac{v(2) + v(12) - v(1)}{2}.$$

Shapley 值向量 $\psi(v)$可看成是线段

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant v(1), x_2 \geqslant v(2), x_1 + x_2 = v(12)\}$$

的中点。

三人(0,1)规范对策的 Shapley 值为

$$\varphi_1(v) = \frac{v(12) + v(13) + 2v(23) + 2}{6},$$

$$\varphi_2(v) = \frac{v(21) + v(23) - 2v(12) + 2}{6},$$

$$\varphi_3(v) = \frac{v(31) + v(32) - 2v(12) + 2}{6}.$$

一般地，容易证明，在策略等价关系之下 Shapley 值保持不变。换言之，如果对策 u, v 满足

$$u(S) = \alpha v(S) + \sum_{i \in s} \beta_i$$

其中 $\alpha > 0, \beta_1, \cdots, \beta_n$ 为实数，则

$$\psi(u) = \alpha\psi(v) + \beta$$

这里，$\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$。

把 Shapley 值应用到简单对策，就会得到所谓的 Shapley-Shubik 权力指标。假定 v 是简单对策，那么，在(7.1.3)的和式中，$v(S \cup i) - v(S)$的取值只有两个，或0或1，而且取值为1的充要条件是 S 本身是个输联盟，但当 i 加入之后又能转败为胜，亦即 i 处于“关键”的位置。所以

$$\varphi_i(v) = \sum_{S} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!} \qquad (7.1.13)$$

其中$\sum$对所有使 i 成为其关键的那种联盟求和。

可以用“随机顺序”对(7.1.13)加以解释。我们知道，在局中人的任一排列中，逐渐扩大的联盟都要在某处转败为胜，即恰好有一

个人处于这一排列的关键位置。于是，如果各种顺序的概率都相同，则 $\varphi_i(v)$ 就是局中人 i 处于关键位置的概率。

由于在简单对策中，$v(S)$ 一般不再表示 S 得益多少，而是表示 S 各成员的一致行动能否取胜（如通过某项法案），所以在这种情况下，局中人的 Shapley 值就不再表示他应得的份额，而是表示他对联盟的取胜起了多大的作用，即衡量了他在对策过程中"权力"的大小。因此，在对策论的文献中常常用"权力指标"这一名称来表示上述概念，而由(7.1.13)定义的权力指标称为 Shapley-Shubik 权力指标。

文献中也常用另一种权力指标，即 Banzhaf 权力指标来度量权力。为说明这一概念，我们称使得 $S\cup i$ 赢且 S 输的联盟 S 为局中人 i 的摆盟。记 $Q_i(v)$ 为局中人 i 的摆盟总数，则

$$\beta_i(v) = Q_i(v)/\sum_{j=1}^{n} Q_j(v)$$

就是规范的 Banzhaf 权力指标。我们也记

$$\beta(v) = (\beta_1(v), \cdots, \beta_n(v))$$

$Q(v)=(Q_1(v), \cdots, Q_n(v))$ 的另一种规范形式是

$$\varphi(v) = 2^{1-n}Q(v)$$

用这种规范形式有时显得更为方便。

显然，$Q_i(v)$ 可表示为

$$Q_i(v) = \sum_{S\subset N-i}[v(S\cup i) - v(S)] \qquad (7.1.14)$$

因为就简单对策而言，(7.1.14)中只有当 S 是摆盟时，才有 $v(S\cup i)-v(S)=1$，其余项均取0值。(9.1.14)的好处是它对于一般的对策都有意义。于是有

$$\psi_i(v) = \sum_{S\subset N-i}\frac{1}{2^{n-1}}[v(S\cup i) - v(S)] \qquad (7.1.15)$$

$$\psi(v) = (\psi_1(v), \cdots, \psi_n(v))$$

(7.1.15)与(7.1.3)很相象，两者都是取 $v(S\cup i)-v(S)$ 的加权平

均值，区别是(7.1.3)的和中各项的权与 S 的大小有关，而(7.1.15)的和中各项具有相同的权。

例2　假定有四个局中人，各人拥有的选票是3,2,1,1，而实施某计划需要5张赞成票，于是，我们得到一个加权多数对策(5;3,2,1,1)。为方便计，用3和2分别表示拥有三张和两张选票的局中人，而两个都拥有一张选票的局中人用 A 和 B 来表示。

所有可能的摆盟总数是2^4，而3,2,A,B 四人拥有的摆盟总数分别为5,3,1,1。于是，第一种规范的 Banzhaf 权力指标为 $\beta=(0.5,0.3,0.1,0.1)$，而第二种规范的权力指标为 $\psi=(5/8,3/8,1/8,1/8)$。

为计算 Shapley-Shubik 指标，列出四个局中人的所有排列：

$32AB$	$23AB$	$2A3B$	$2AB3$
$32BA$	$23BA$	$2B3A$	$2BA3$
$3A2B$	$A32B$	$A23B$	$A2B3$
$3AB2$	$A3B2$	$AB32$	$AB23$
$3B2A$	$B32A$	$B23A$	$B2A3$
$3BA2$	$B3A2$	$BA32$	$BA23$

在这24种排列中，每一种都恰好有一个关键，已用圆点标出，表示他的到来使联盟转败为胜。数一下各人成为关键的次数即知 Shapley-Shubik 指标为(14/24,16/24,2/24,2/24)。

§2　模糊延拓

如果把联盟 $S\subset N$ 等同于它的特征向量 $e^S=(e_1^S,e_2^S,\cdots,e_n^S)$：

$$e_i^S = \begin{cases} 1, & i \in S \\ 0, & i \overline{\in} S \end{cases}$$

那么，联盟的全体刚好就是 n 维的单位方体 $Q^n=[0,1]^n$ 的顶点集合 $V^n=\{0,1\}^n$. Q^n 中的其它点有时叫作“模糊联盟”，每个局中人都以一定的“隶属度”属于这种联盟。它也可以看成为各局中人都以一定的概率参加进去的随机联盟 $\underset{\sim}{S}$.

定义在 Q^n 上的实函数（在原点取0值）称为模糊对策。本节介绍如何将普通的合作对策延拓成为模糊对策，并讨论这些模糊延拓与 Shapley 值之间的关系。

2.1 多重线性延拓(multilinear extension)

把定义在 Q^n 的顶点上的实函数 v（合作对策）扩充成为 Q^n 上的实函数，一种很自然的方法是用线性插值，先将 v 线性延拓到 Q^n 的各边，再延拓到二维面，如此等等，所有的插值都在与坐标轴

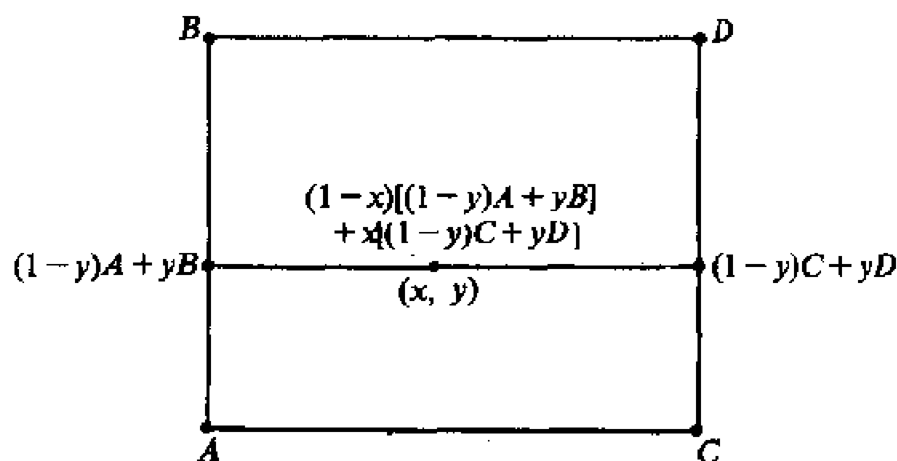


图7.2.1

平行的直线上进行（见图7.2.1）。这就是由 Qwen[13]引入的多重线性延拓 $\bar{v}_o(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其一般公式为

$$\bar{v}_0(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum_{T\subset N}\Big[\prod_{i\in T}x_i\prod_{i\overline{\in} T}(1-x_i)\Big]v(T) \tag{7.2.1}$$

显然，$\bar{v}_0$关于每个变量都是线性函数，这也是我们称之为多重线性延拓的理由。不过，尚需说明 $\bar{v}_0$的确是 v 的延拓，即

$$\bar{v}_0(e^S) = v(S) \tag{7.2.2}$$

而且 $\bar{v}_0$是 v 唯一的多重线性延拓。

事实上，当$(x_1,\cdots,x_n)=e^S$ 时，(7.2.1)右边的和式中只有 $T=S$ 那一项为 $v(S)$，其余均为 O，所以(7.2.2)显然成立。为证唯一性，注意到任一多重线性延拓都可写成

$$\bar{v}(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{T\subset N} c_T \prod_{i\in T} x_i \tag{7.2.3}$$

它应该满足 $\bar{v}(e^S)=v(S)$，即

$$\sum_{T\subset N} c_T = v(S), \quad S\subset N \tag{7.2.4}$$

这是一个有2^n 未知数和2^n 个方程的线性方程组，由(7.2.1)可导出它的一个解，这个解实际上已由(7.1.6)表出，它对于任一对策 v 都成立。但对于线性方程组，这意味着它的系数矩阵是非奇异的，因而(7.2.4)具有唯一解。因此，多重线性延拓是唯一的，且由(7.2.1)给出。

上面的讨论也表明可将(7.2.1)写成另一种形式：

$$\bar{v}_0(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum_{T\subset N} c_T \prod_{i\in T} x_i \tag{7.2.5}$$

其中

$$C_T = \sum_{U\subset T}(-1)^{|T|-|U|}v(U) \tag{7.2.6}$$

我们可以对多重线性延拓加以解释。设 $\underset{\sim}{S}$为随机联盟，假定各局中人相互独立地参加联盟，且局中人 i 参加的概率为 x_i. 在这种情况下，形成联盟 T 的概率为

$$P_r(\underset{\sim}{S}=T) = \prod_{i\in T} x_i \prod_{i\notin T}(1-x_i)$$

所以，

$$E[v(\underset{\sim}{S})] = \bar{v}_0(x_1,\cdots,x_n)$$

换言之，$\bar{v}_0(x_1,\cdots,x_n)$就是在上面这种随机机制下随机联盟的期望效益。

下面讨论多重线性延拓与 Shapley 值之间的关系。(7.2.5)两边对 x_k 求偏导数，得

$$\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x_i}(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} c_T \prod_{\substack{i\in T\\ i\neq k}} x_i$$

两边沿 Q^n 的对角线$\{(t,t,\cdots,t)|O\leqslant t\leqslant 1\}$积分

$$\int_0^1 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x_i}(t,t,\cdots,t)dt = \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} c_T \int_0^1 t^{|T|-1}dt = \sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}} \frac{c_T}{|T|}$$

这与(7.1.7)的左边相同，由此得到

定理7.2.1 设 $\bar{v}_o$ 是 v 的多重线性延拓，则 Shapley 值 $\varphi(v)$ 可表示为

$$\varphi_i(v) = \int_0^1 \frac{\partial \bar{v}_o}{\partial x_i}(t,\cdots,t)\mathrm{d}t \qquad (7.2.7)$$

换言之，Shapley 值向量是多重线性延拓的递度沿 Q^n 的对角线的平均值。

公式(7.2.7)除了形式上的漂亮之外，还有两方面的作用：一方面它可用来近似计算一些大对策(n 很大)的 Shapley 值(详见[14])；另一方面还可用来推广 Shapley 值，比如将积分路径改为连接(0,0,…,0)与(1,1,…,1)的指数曲线

$$\{(t^a,t^a,\cdots,t^a)\,|\,0<t\leq 1\},\ a>0$$

或者更加一般的路径，所得结果往往对应于减弱一上节的某些 Shapley 公理(参见[5])。

2.2 Cornet 延拓

Cornet 曾引入合作对策的另一种延拓，这就是

$$\bar{v}_C(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{T\subset N} c_T\Big(\prod_{i\in T} x_i\Big)^{\frac{1}{|T|}} \qquad (7.2.8)$$

其中 c_T 跟上节一样，仍由(7.2.6)确定。显然，$\bar{v}_C$ 的确是 v 的延拓而且是齐次函数。

计算 $\bar{v}_C$ 在对角线的偏导数，并利用(7.1.7)，得

$$\frac{\partial \bar{v}_C}{\partial x_i}(t,\cdots,t)=\sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}}\frac{c_T}{|T|}=\varphi_i(v) \tag{7.2.9}$$

于是，$\bar{v}_c$ 在对角线任一处的梯度都等于 Shapley 值向量。特别地

$$\varphi_i(v)=\int_0^1\frac{\partial \bar{v}_C}{\partial x_i}(t,\cdots,t)\mathrm{d}t \tag{7.2.10}$$

利用 Cornet 延拓，还可以得到

定理7.2.2 如果对策 v 满足

$$c_S=\sum_{T\subset S}(-1)^{|S|-|T|}v(T)\geqslant 0,\quad \forall\ S,|S|\geqslant 2 \tag{7.2.11}$$

则 $\varphi(v)\in C(v)$。

证 首先，注意到，当 $|S|\geqslant 2$时

$$-\left(\prod_{i\in S}x_i\right)^{\frac{1}{|S|}} \tag{7.2.12}$$

是凸函数。这可通过判断其 Hessian 矩阵的半正定性而获得证明。而当 $|S|=1$时，(7.2.12)是线性函数。因此，当(7.2.11)满足时，$\bar{v}_C$ 是凹函数。

根据凹函数的性质，有

$$\bar{v}_C(x)-\bar{v}_C(e^N)\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)\frac{\partial \bar{v}_C}{\partial x_i}(e^N) \tag{7.2.13}$$

由于

$$\bar{v}_C(e^N)=v(N)=\sum_{i\in N}\varphi_i(v)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \bar{v}_C}{\partial x_i}(e^N)$$

所以，(7.2.13)等价于

$$v(x)\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_i\varphi_i(v)$$

特别地，取 $x=e^S$，就得到

$$\sum_{i\in s}\psi_i(v)\geqslant v(S)$$

这就证明了 $\psi(v)\in C(v)$.

我们给出一个满足(7.2.11)的对策例子。

定理7.2.3 设 $C=(C_1,C_2,\cdots,C_n)\in R_+^n$，$p$ 是正整数，则由

$$v(S)=\Big(\sum_{i\in S}C_i\Big)^p,\quad S\subset N$$

定义的对策满足(7.2.11)。

在证明这个定理之前我们先说明一下，定理中的对策对于任何实数 $p\geqslant 1$ 都是凸的(见第八章第二节)，从而其 Shapley 值向量属于核心。但是，在本定理中，p 是正整数这一条件不能减弱，例如当 $p=3/2$时，所得对策有时就不满足(7.2.11)。

证 用归纳法来证明：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{i) } c_A=\displaystyle\sum_{p_1+\cdots+p_n=p}C_1^{p_1}\cdots C_n^{p_n}\frac{p!}{p_1!\cdots p_n!}\geqslant 0, & |A|\leqslant p\\ \text{ii) } c_A=0, & |A|>p\end{array}\right\}\tag{7.2.14}$$

当$|A|=1$时，这是对的，因为如果 $A=\{i\}$，则 $c_A=v(i)=C_i^p$. 假定(7.2.14)对于$|A|\leqslant a-1$都成立。现考虑满足$|A|=a$ 的一个联盟 A. 不失普遍性，设 $A=\{1,2,\cdots,a\}$，因此

$$\begin{aligned}v(A)&=(C_1+\cdots+C_a)^p\\&=\sum_{B\subset A}\sum_{\substack{p=q_1+\cdots+q_b\\B=\{i_1,\cdots,i_b\}}}\frac{p!}{q_1!\cdots q_b!}C_{i_1}^{q_1}\cdots C_{i_b}^{q_b}\end{aligned}\tag{7.2.15}$$

如果 $a\leqslant p$，则归纳假设意味着

$$v(A)=\sum_{\substack{B\subset A\\|B|<a}}c_B+\sum_{\substack{p=q_1+\cdots+q_a\\B=\{i_1,\cdots,i_a\}}}\frac{p!}{q_1!\cdots q_a!}C_{i_1}^{q_1}\cdots C_{i_a}^{q_a}\tag{7.2.16}$$

另一方面，由 $v(A)=\sum_{B\subset A}c_B$ 得

$$c_A = \sum_{\substack{p=q_1+\cdots+q_a \\ B=\{i_1,\cdots,i_a\}}} \frac{p!}{q_1!\cdots q_a!} C_{i_1}^{q_1}\cdots C_{i_a}^{q_a} \qquad (7.2.17)$$

这就证明了(7.2.14)的 i)，因为诸 C_i 均非负，故 $c_A \geqslant 0$. 如果 $a > p$，则根据归纳假设，当 $p < |B| \leqslant a-1$时，$c_B = 0$. 因此

$$v(A) = \sum_{B\subset A} c_B = \sum_{\substack{B\subset A \\ |B|\leqslant p}} c_B + c_A$$

另一方面，从(7.2.16)推得

$$v(A) = \sum_{\substack{B\subset A \\ |B|\leqslant p}} c_B$$

所以 $c_A = 0$. 定理得证。

比较定理7.2.2和定理7.1.4，我们自然会问满足(7.2.11)的对策与凸对策有什么样的关系。

定理7.2.4 如果

$$c_S = \sum_{T\subset S} (-1)^{|S|-|T|} v(T) \geqslant 0, \quad \forall S, |S| \geqslant 2$$

则

$$v(A) + v(B) \leqslant v(A\cup B) + v(A\cap B), \quad \forall A,B\subset N$$

即 v 是凸对策。

证 首先，注意到凸性不等式等价于$\forall S\subset N, i,j\in S$ 且 $i\neq j$,

$$v(S-i) + v(S-j) \leqslant v(S) - v(S-ij)$$

如果定理的条件成立，则$\forall S\subset N, i,j\in S, i\neq j$,

$$\begin{aligned} &v(S) + v(S-ij) - v(S-i) - v(S-j) \\ &= \sum_{T\subset S} c_T + \sum_{T\subset S-ij} c_T - \sum_{T\subset S-i} c_T - \sum_{T\subset S-j} c_T \\ &= \sum_{i\in T\subset S} c_T - \sum_{i\in T\subset S-j} c_T = \sum_{ij\subset T\subset S} c_T \geqslant 0 \end{aligned}$$

证毕。

2.3 其它延拓

可以将多重线性延拓和 Cornet 延拓统一成如下的形式

$$\bar{v}(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{T\subset N}c_T\left(\prod_{i\in T}x_i\right)^{\alpha_T} \qquad (7.2.18)$$

其中 α_T 是任一正实数(可以与 T 有关)。显然,这样定义的模糊对策是 v 的延拓,且当 $\alpha_T=1$时,所得为多重线性延拓;而当 $\alpha_T=\frac{1}{|T|}$ 时,所得就是 Cornet 延拓。至于 Shapley 值,有

$$\int_0^1\frac{\partial v}{\partial x_i}(t,\cdots t)\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}}c_T\alpha_T\int_0^1 t^{\alpha_T|T|-1}at=\sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}}\frac{c_T}{|T|}$$

所以仍然成立

$$\psi_i(v)=\int_0^1\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_i}(t,\cdots,t)\mathrm{d}t$$

Shapley 和 Shubik 在研究市场对策时曾引入另一种模糊延拓 $\bar{v}_B$,定义为

$$\bar{v}_B(x)=\max\sum_{i=1}^m y_iv(T_i),\quad x\in Q^n \qquad (7.2.19)$$

其中 max 对所有满足

$$\sum y_ie^{T_i}=x \qquad (7.2.20)$$

的正数 $y_1,\cdots,y_m$ 及集合 $T_1,\cdots,T_m$ 来取。当 $x=e^S$ 时,(7.2.20)等价于$\{T_1,\cdots,T_m\}$是 S-均衡类,且 $y_1,\cdots,y_m$ 是它的一组均衡系数。于是,$\bar{v}_B$ 确是 v 的延拓的充要条件是

$$v(S)=\max\sum_{i=1}^m y_iv(T_i),\quad \forall\, S\subset N$$

其中 max 对所有 S-均衡类$\{T_1,\cdots,T_m\}$及均衡系数 $y_1,\cdots,y_m$ 来取,也就是 v 限制在任一联盟 S 上所得的子对策$(S,v|S)$是均衡

的，或者说对策$(S,v|_S)$的核心非空。这样的对策恰好是上一章提出的完全均衡对策。所以，只有当 v 是完全均衡对策时，$\bar{v}_B$ 才真正是 v 的延拓。

§3 谈判集

早在60年代初，人们就开始意识到合作对策实际上是个谈判过程，是各局中人通过谈判达成协议结为联盟的过程。前面所论的 Shapley 值只是对各局中人贡献大小作了衡量，或者说是总收入的一种"公平"的分配；核心与稳定集只是对分配的合理性提出了要求，同样没有隐含这一谈判过程。谈判集正是根据局中人之间可能出现的相互谈判而提出的合作对策的解的概念。由它还将衍生出后面两节要介绍的核与核子。

在这一节及后面两节，我们仅假定所论对策(N,v)满足 $E(v)\neq\varnothing$，即只假定

$$v(N)\geqslant\sum_{i\in N}v(i)$$

而并不假定超加性成立。我们仍然研究如何在分配集合 $E(v)$中选出一个分配作为对策的最终结局。

设 x 是一个分配。对于这个分配，可能有某两个局中人 i 和 j 尚有争议：i 觉得自己应不止得这么多，现在却让 j 占了便宜。这时 i 可以找到一个联盟 $S=\{l_1,l_2,\cdots,l_S\}$，使 $i\in S$，$j\overline{\in}S$，以及代表 S 中诸成员所得的支付向量 $y=(y_{l_1},y_{l_2},\cdots,y_{l_s})$使得

$$\left.\begin{aligned} &y_k>x_k, \qquad k\in S\\ &y(S)=v(S)\end{aligned}\right\} \tag{7.3.1}$$

(这里 $y(S)$仍表示和 $\sum_{k\in S}y_k$) 换言之，i 可以组织一个没有 j 参加的联盟 S，在这个联盟中，可以将其总收入分配得使各参加者所得

比在分配 x 中的所得更多。这样一个二元偶(S,y)就称为局中人 i 对 j 关于分配 x 的异议(objection)。

局中人 j 针对 i 的异议(S,y)可能有一定的办法来对付,或者说 j 可能有能力组织一个没有 i 参加的联盟 D,以及代表 D 中各人所得的支付向量 z,使得

$$\left.\begin{array}{ll} z_k \geqslant y_k, & k \in D \cap S \\ z_k \geqslant x_k, & k \in D - S \\ z(D) = v(D) & \end{array}\right\} \tag{7.3.2}$$

换言之,在联盟 D 中,可以将其总收入分配得满足:D 中各人所得至少有他们在分配 x 中的所得那么多,而且,对于 D 可能需要的 S 中的局中人,他们的所得至少有参加联盟 S 时的所得那么多。这样一个二元偶(D,Z)就称为局中人 j 对 i 关于异议(S,y)的反异议(counter—objection).

显然,针对 i 对 j 的异议(S,y),j 有对 i 的反异议的充要条件是存在 D,使 $j\in D$,$i\overline{\in}D$,且

$$x(D-S)+y(D\cap S)\leqslant v(D) \tag{7.3.3}$$

定义7.3.1 合作对策 v 的一个分配 x 称为谈判点,如果对于每一对局中人 i 和 j,i 对 j 关于 x 的任何异议(S,y)都要遭到 j 对 i 的反异议(关于(S,y))。对策 v 的谈判点的全体称为谈判集(bargaining set),记为 $M_1^i(v)$或 M_1^i.

谈判集的这种定义最早由 Aumann 和 Maschler[1]于1964年引入。这里异议和反异议都只涉及单个局中人.如果在定义中将单个局中人 i 和 j 分别用互不相交的局中人集合 I 和 J 来代替,且在 I 的异议中不允许使用 J 的任何成员,而在 J 的反异议中可以使用 J 的一部分局中人,但非全部,就得到另一种谈判集 $M_1^i(v)$或 M^i. 显然,$M^i\subset M_1^i$. 以后只局限于研究谈判集 M_1^i.

谈判集的存在性(即 M_1^i的非空性)最初由 Peleg[15]用不动点定理证明,但它也可以用后面要引进的核与核子来证明,而且后面

那种证明是纯代数的，证明的同时也提供了一种具体求出一个谈判点的方法。

核心是谈判集的子集，因为对于核心中的分配，任何局中人都无力提出异议。但是对于一般的对策，即使其核心非空，谈判集也往往含有核心之外的分配。

例1　考虑三人常和(0,1)规范对策 v：

$$v(1)=v(2)=v(3)=0,$$

$$v(12)=v(23)=v(13)=v(123)=1.$$

其核心显然是空的。容易证明，$M_1^i=\{(1/3,1/3,1/3)\}$。实际上，对于分配 $x^0=(1/3,1/3,1/3)$，任何局中人 i 的异议只能通过二人联盟来实现，即可以写成 $(ij,(1/3+\varepsilon_i,1/3+\varepsilon_j))$，其中 $\varepsilon_i>0,\varepsilon_j>0$，$\varepsilon_i+\varepsilon_j=1/3$. 而它却要遭受反异议 $(ik,(1/3+\varepsilon_i,1/3+\varepsilon_k))$，其中 k 表示三局中人中除 i 和 j 之外的第三者，$\varepsilon_k=1/3-\varepsilon_i\geqslant 0$。因此，$x^0\in M_1^i$. 另一方面，对于任何异于 x^0 的分配 (x_1,x_2,x_3)，不妨设 $x_1>x_2$，局中人2对1有异议 $(23,(x_2+\varepsilon,1-x_2-\varepsilon))$，其中 ε 是充分小的正数，例如满足 $0<\varepsilon<\min(1-x_2-x_3,x_1-x_2)$. 于是，在这个异议中，局中人2为了取得3的合作，把大部分多出来的收入 $1-x_2$ 留给了3. 针对此异议，局中人1提出反异议的唯一办法是通过联盟13，但 $x_1+1-x_2-\varepsilon>1$，可见联盟13已无力组成反异议，这表明 $(x_1,x_2,x_3)\overline{\in} M_1^i$. 因此，$M_1^i$ 中只有一个分配 x^0.

例2　设 $N=\{1,2,3,4,5,6\}$，特征函数 v 定义如下

$$v(N)=2$$

$$v(12)=v(34)=v(125)=v(126)$$
$$=v(345)=v(346)=1$$

$$v(S)=0,\quad \text{其它 } S$$

该对策的核心，可表示为

$$C(v)=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)\mid x_i\geqslant 0,x_1+x_2$$
$$=x_3+x_4=1,x_5=x_6=0\}\neq\varnothing$$

考虑分配(1/3,1/3,1/3,1/3,1/3,1/3). 它显然不在核心当中,但对于这个分配,可以组成异议的联盟只有12和34,而它们要分别遭受345或346、125或126的反异议。例如,局中人1对5提出异议(12,$(1/3+\varepsilon_1,1/3+\varepsilon_2)$),其中 $\varepsilon_1+\varepsilon_2=1$,$\varepsilon_1>0$,$\varepsilon_2>0$,则5有反异议(345,(1/3,1/3,1/3)),因此,$(1/3,1/3,1/3,1/3,1/3,1/3)\in M_1^i$.

下面的定理将表明,对于凸对策,例2中的情况不会出现,即凸对策的谈判集与核心重合。这一结论是由 Maschler、Peleg 和 Shapley[11]证明的。

定理7.3.1 设 v 是凸对策,则 $M_1^i(v)=C(v)$

证 设 $x\overline{\in}C(v)$,只需证明 $x\overline{\in}M_1^i(v)$即可。下面为方便,记

$$e(S)=v(S)-x(S) \tag{7.3.4}$$

设 R 是满足

$$e(R)=\max_{S\subset N}e(S)>0$$

的极大联盟,于是

$$e(S)\leqslant e(R)\qquad \forall\, S\subset N \tag{7.3.5}$$

$$e(S)<e(R),\qquad R\not\subseteq S\subset N \tag{7.3.6}$$

现在考虑以联盟 R 为局中人全体的合作对策(R,e),其中特征函数 e 由(7.3.4)定义。显然,这是一个凸对策。类似于定理6.6.1的证明,我们作对策(R,e'),其中

$$e'(S)=\max_{T\subset S}e(T)$$

易证(R,e')是凸对策(证明类似,这里略去),从而具有非空的核心。任取其中一元 u,我们有

$$u(R)=e'(R)=\max_{T\subset R}e(T)=e(R)>0 \tag{7.3.7}$$

$$u(T)\geqslant e'(T)\geqslant e'(T),\quad \forall\, T\subset S \tag{7.3.8}$$

$$u_i\geqslant e'(i)\geqslant e'(\varnothing)=0,\quad \forall\, i\in R \tag{7.3.9}$$

为构造一个异议,取 $k\in R$,使 $u_k>0$,再取 $l\in N-R$.(因 $u(R)>0$,$R\neq\varnothing,N$,所以这总是可以做到的。)取充分小的 $\varepsilon>0$使 $u_k-(|R|$

$-1)\varepsilon>0$. 然后作(R,y)，其中

$$y_i=\begin{cases}u_i+x_i+\varepsilon, & i\in R-k\\ u_k+x_k-(|R|-1)\varepsilon, & i=k\end{cases} \quad (7.3.10)$$

显然，

$$y(R)=u(R)+x(R)=v(R)$$
$$y_i>x_i,\quad \forall\, i\in R$$

因此，(R,y)是局中人 k 对 l 的一个异议。针对这个异议，l 必定没有反异议。实际上，对于每一可能构成反异议的联盟 D，$l\in D$，$k\overline{\in} D$，根据(7.3.8)、(7.3.6)和凸性，有

$$\begin{aligned}u(D\cap R)&\geqslant e(D\cap R)\\ &\geqslant e(D)+e(R)-e(D\cup R)\\ &>e(D)\end{aligned}$$

从而由(7.3.10)，

$$\begin{aligned}&x(D-R)+y(D\cap R)\\ &=x(D)+(y-x)(D\cap R)\\ &\geqslant x(D)+u(D\cap R)\\ &>x(D)+e(D)=v(D)\end{aligned}$$

可见联盟 D 无力组成反异议。因此，$x\overline{\in} M_1^i$.

§4 核

核是为了研究谈判集而引进的概念，最早由 Davis 和 Maschler[3]于1965年提出。

为了说明这一概念，引入记号

$$e(S,x)=v(S)-x(S)$$

并称之为联盟 S 关于支付向量 x 的超出值(excess)。在不致引起混淆的情况下，也简记 $e(S,x)$为 $e(S)$. 还记 $\mathscr{T}_{ij}$ 为含局中人 i 而

不含局中人 j 的联盟之全体，即

$$\mathscr{T}_{ij}=\{S\subset N|i\in S,j\notin S\}$$

对于任一支付向量 x，定义

$$s_{ij}(x)=\max_{S\in\mathscr{T}_{ij}}e(S,x) \tag{7.4.1}$$

并称之为在 x 处局中人 i 超过 j 的最大超出值，它表示局中人 i 在没有 j 合作的情况下所能获得的最大额外收入，可作为 i 相对于 j 的"力量"的一种度量。

如果

$$s_{ij}(x)>s_{ji}(x) \tag{7.4.2}$$

且

$$x_j>v(j) \tag{7.4.3}$$

则称 i 胜过 j(关于 x)。说 i 与 j 处于平衡，如果这两个局中人中任何一个都不胜过另一个(关于 x)。

定义7.4.1 合作对策 v 的核 $K(v)$(或简记为 K)是指所有这样的分配 x 之全体：关于分配 x，任何两个局中人都处于平衡。等价地，

$$K(v)=\{x\in E(v)|(s_{ij}(x)-s_{ji}(x))(x_j-v(j))\leqslant 0,\quad\forall i,j\in N,i\neq j\} \tag{7.4.4}$$

核的非空性可用不动点定理加以证明，但我们仍将这一问题留在下一节用纯代数的方法加以解决。那里实际上得到一个更强的结论，可叙述为

定理7.4.1 对于任何对策 v，必有 $K(v)\neq\varnothing$，而且在核心非空的情况下，核与核心有非空的交。

不难证明，核在策略等价关系之下保持不变。换言之，如果有两个对策 (N,u) 和 (N,v) 满足

$$u(S)=\alpha v(S)+\sum_{i\in S}\beta_i$$

其中 $\alpha>0$，$(\beta_1,\cdots,\beta_n)\in R^n$，则

$$K(u) = \{\alpha x + \beta | x \in K(v)\}$$

因此,研究核时,可不妨假定所论对策是0规范的,即满足

$$v(i) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

关于核与谈判集的关系,有

定理7.4.2 对于任何对策 v,$K(v) \subset M_1^i(v)$。

证 任取 $x \in K(v)$,需要证明 $x \in M_1^i(v)$。为此必须说明,对于任一给定的一对局中人 i 和 j,i 对 j 的任一异议(C,y)都要遭受 j 对 i 的反异议,即存在 $D \in \mathscr{T}_{ji}$,使得

$$y(D \cap C) + x(D - C) \leqslant v(D) \qquad (7.4.5)$$

根据异议的定义,有 $C \in \mathscr{T}_{ij}$,使

$$\begin{cases} y_k > x_k, & \forall k \in C \\ y(C) = v(C) \end{cases} \qquad (7.4.6)$$

如 $x_j = v(j)$,则取 $D = \{j\}$即得反异议(D, x_j). 下面设 $x_j > v(j)$. 由于 $x \in K(v)$,故

$$s_{ij}(x) \leqslant s_{ij}(x) \qquad (7.4.7)$$

设 $s_{ij}(x)$的定义中最大值在 $D \in \mathscr{T}_{ij}$处达到,即

$$s_{ij}(x) = e(D)$$

则

$$\begin{aligned} & y(D \cap C) + x(D - C) \\ & = y(C) - y(C - D) + x(D) - x(C \cap D) \\ & \leqslant v(C) - x(C - D) + x(D) - x(C \cap D) \\ & = v(C) - x(C) + x(D) \\ & = e(C) - e(D) + v(D) \\ & \leqslant s_{ij}(x) - s_{ij}(x) + v(D) \leqslant v(D) \end{aligned}$$

其中第二个不等号由(7.4.6)导出,最后一个不等式由(7.4.7)推出。定理得证。

核作为谈判集的子集,它具有一些其本身特有、一般谈判集并不具备的性质,特别是它也具备 Shapley 值的一些特性。

定理7.4.3 设(N,v)是合作对策。

i）如果局中人 l 和 k 处于完全对称的位置，即 v 满足

$$k,l \overline{\in} S \Rightarrow v(S \cup k) = v(S \cup l) \qquad (7.4.8)$$

则对于每一 $x \in K(v)$，有 $x_k = x_l$.

ii）如果局中人 i 是哑元，即满足

$$v(S \cup i) = v(S), \quad \forall S \subset N$$

则对每一 $x \in K(v)$，都有 $x_i = 0$.

证 i） 假定 $x_k > x_l$，且 $s_{kl}(x)$的定义中最大值在 $S \in \mathscr{T}_{kl}$处达到，即

$$e(S) = s_{kl}(x) \qquad (7.4.9)$$

令 $S' = S \cup l - k$，则 $S' \in \mathscr{T}_{lk}$，且由对称性知 $v(S) = v(S')$. 于是，

$$\begin{aligned} e(S) &= v(S') - x(S) \\ &= e(S') + x_l - x_k < e(S') \end{aligned}$$

由此推得

$$s_{lk}(x) \geqslant e(S') > e(S) = s_{kl}(x)$$

结合 $x_k > x_l \geqslant v(l) = v(k)$，得知 l 胜过 k，这与 $x \in K(v)$矛盾。因此，$x_k \leqslant x_l$.

同理可证，$x_l \leqslant x_k$，故 $x_k = x_l$，i）得证。

ii） 假定 $x_i > 0$，由 $x \in K(v)$知道，对于任何 $j \neq i$，$s_{ji}(x) \leqslant s_{ij}(x)$. 设

$$e(S,x) = \max\{s_{kl}(x) \mid k,l \in N, k \neq l\} = a$$

可以假定 $i \in S$，因为在相反的情况下，任取 $j \in S$，由

$$a = e(S,x) \leqslant s_{ji}(x) \leqslant s_{ij}(x) = e(S',x)$$

知道可用 $S' \in \mathscr{T}_{ij}$代替 S. 进一步，可以断定 $S = \{i\}$. 因为假如 $S - i \neq \varnothing$，则可从

$$e(S,x) < e(S-i,x) \leqslant a$$

得出矛盾。因此

$$a = e(i,x) = -x_i < 0$$

另一方面，

$$a \geqslant e(N-i,x) > e(N,x) = 0$$

这一矛盾表明假设不成立，因此，$x_i = 0$。

核的定义虽然比谈判集较为简单(这是以牺牲其直观意义为代价的)，但与前面遇到的核心、稳定集相比，仍是比较复杂的概念。虽然如此，对于一大类合作对策(包含满足超加性的所有对策)，核的定义可以大大简化，这就是下面的

定理7.4.4 如果特征函数 v 满足

$$S \subset T \Rightarrow v(T) \geqslant v(S) + \sum_{i \in T-S} v(i) \tag{7.4.10}$$

则 $x \in K(v)$ 当且仅当 $x \in E(v)$ 且下式成立

$$s_{ij}(x) = s_{ji}(x), \quad \forall\, i,j \in N, i \neq j \tag{7.4.11}$$

证 不妨假定对策 v 是0规范的，这时(7.4.10)变成

$$S \subset T \Rightarrow v(S) \leqslant v(T) \tag{7.4.12}$$

只需证明核中任一分配 x 必满足(7.4.11)。

记

$$a = \max\{s_{ij}(x) \mid i,j \in N, i \neq j\}$$

$$\mathscr{D} = \{S \mid S \neq \varnothing, N, e(S,x) = a\}$$

$$M = \bigcap_{S \in \mathscr{D}} S. \tag{7.4.13}$$

我们先证明 $M = \varnothing$，实际上，假如 $M \neq \varnothing$. 设 $k \in M$，任取 $l \in N-M$，由(7.4.13)，有

$$s_{kl}(x) = a > s_{lk}(x)$$

于是从 $x \in K(v)$ 推出 $x_l = 0$. 设 $S_0 \in \mathscr{D}$ 满足 $l \notin S_0$. 由

$$e(S_0) = v(S_0) - x(S_0) = v(S_0) - x(N)$$

$$\leqslant v(N) - x(N) = 0$$

及 $e(l) = v(l) - x_l = 0$ 知 $\{l\} \in \mathscr{D}$. 这样 $\mathscr{D}$ 中就含有两个不相交的集合 S_0 和 $\{l\}$，因此 $M = \varnothing$，与假设不符。这就证明了 $M = \varnothing$.

再证明 x 满足(7.4.11)。假定存在两个局中人 i 和 j 使

$$s_{ij}(x) > s_{ji}(x). \qquad (7.4.14)$$

于是 $x_j=0$. 根据已经证明的结论，$\mathscr{D}$ 中存在不含局中人 i 的联盟 S_1. 由(7.4.12)，

$$e(S_1,Uj) = v(S_1 \cup j) - x(S_1) - x_j$$
$$\geqslant v(S_1) - x(S_1) = e(S_1)$$

因此，

$$s_{ji}(x) \geqslant e(S_1 \cup j) \geqslant e(S_1) = a \geqslant s_{ij}(x)$$

这与(7.4.14)矛盾。定理得证。

如果进一步加强定理7.4.3的条件，要求 v 是凸对策，那么核的结构就特别简单。

定理7.4.5 如果 v 是凸对策，则 $K(v)$是单点集。

该定理的证明比较困难，它构成了[11]的主要内容。但从定理7.4.2及定理7.3.1可立即推得较该定理为弱的一个结论，即凸对策的核必为核心的子集。

在本节的最后，我们再来研究核与核心的几何关系。

设 x 是核心 $C(v)$中的一点。考虑从 x 出发让 x_j 增大，同时让 x_i 减小相同的数量而得到的射线 $l(x)$：

$$l(x) = \{x - te^i + te^j | t \geqslant 0\}$$

其中 i,j 是事先给定的一对局中人，e^k 为第 k 个单位向量。用 δ_{ij}表示射线上的点处于 $C(v)$时局中人 i 转移给 j 的最大支付，即

$$\delta_{ij}(x) = \max\{t | x - te^i + te^j \in C(v)\}$$

那么

$$\delta_{ij}(x) = - s_{ij}(x) \qquad (7.4.15)$$

实际上，当 x_j 增加 t、x_i 减小 t 时，$e(S,x)$或增加 t、或减小 t 或保持不变，分别对应于 $S\in\mathscr{T}_{ij}$、$S\in\mathscr{T}_{ji}$和 $S\overline{\in}\mathscr{T}_{ij}\cup\mathscr{T}_{ji}$三种情况。因此，在 $x\in C(v)$的条件之下，对于 $t\geqslant 0$，有

$$x - te^i + te^j \in C(v)$$
$$\Leftrightarrow x(S) - t \geqslant v(S), \quad \forall S \in \mathscr{T}_{ij}$$

$$\Leftrightarrow t \leqslant -s_{ij}(x)$$

由此即得(7.4.15)。

再记 $R_{ij}(x)$为以

$$x-\delta_{ij}e^{i}+\delta_{ij}e^{j} \text{ 和 } x+\delta_{ji}e^{i}-\delta_{ji}e^{j}$$

为端点的线段。显然,$R_{ij}(x)=R_{ji}(x)$,且两者只与核心的几何形状有关。

定理7.4.6 设 $x\in C(v)$,则 $x\in K(v)\cap C(v)$当且仅当对于每一对局中人 i 和 j,x 等分线段 $R_{ij}(x)$.

证 由(7.4.15),x 等分线段 $R_{ij}(x)$当且仅当

$$s_{ij}(x)=s_{ji}(x) \tag{7.4.16}$$

因此,只需证明当 $x\in K(v)\cap C(v)$时,(7.4.16)对每一对局中人都成立。

假如有一对局中人 i,j 满足 $s_{ij}(x)>s_{ji}(x)$,则由 $x\in K(v)$知 $x_j=v(j)$. 于是,$s_{ji}(x)\geqslant v(j)-x_j=0$,进而推得 $s_{ij}(x)>0$,这与 $x\in C(v)$矛盾。

定理7.4.6的优点是将核心里属于核的分配用核心的几何形状,而不是用特征函数本身来完全刻划出来。特别地,有如下的重要推论。

推论7.4.7 如果两个对策(N,v)和(N,v')具有相同的核心:$C(v)=C(v')$,则

$$K(v)\cap C(v)=K(v')\cap C(v').$$

注:在上面的论述中,如果用强 ε-核心代替核心,则可得到类似的结论。当然,在作这种推广时,ε 和分配集都要作一定的限制。

§5 核 子

核子是 Schmeidler 于1969年提出的合作对策又一解的概念。

它与字典序有关。

设 u,w 是两个 m 维向量，我们说 u 按字典序小于 w，并记为 $u <_L w$，如果 u,w 不同，且在第一个不相同的分量中，u 的分量比 w 的小。换言之，存在 $1 \leqslant k \leqslant m$ 使

$$u_i = w_i, \quad i = 1,2,\cdots,k-1,$$
$$u_k < w_k$$

我们用 $u \leqslant_L w$ 表示 $u <_L w$ 或 $u = w$.

对于 n 人合作对策 (N,v)，设 x 是它的一个分配，联盟 S 关于 x 的超出值

$$e(S,x) = v(S) - x(S)$$

可看成 S 对分配 x 的满意程度：$e(S,x)$ 越大，S 对 x 就越不满意，从而怨言越多。现将所有联盟(共有 2^n 个)的超出值都列举出来，并按从大到小的顺序排列起来，这样就得到一个向量，记为 $\theta(x)$。即

$$\theta(x) = \begin{bmatrix} \theta_1(x) \\ \theta_2(x) \\ \vdots \\ \theta_{2^n}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(S_1,x) \\ e(S_2,x) \\ \vdots \\ e(S_{2^n},x) \end{bmatrix} \tag{7.5.1}$$

其中 $S_1,S_2,\cdots,S_{2^n}$ 是所有联盟的一个排列(与 x 有关)，满足

$$e(S_1,x) \geqslant e(S_2,x) \geqslant \cdots \geqslant e(S_{2^n},x) \tag{7.5.2}$$

容易证明，$\theta(x)$ 的第 i 个分量可表示为

$$\theta_i(x) = \max_{\substack{\mathscr{D} \subset \mathscr{P}(N) \\ |\mathscr{D}| = i}} \min\{e(S,x) \mid S \in \mathscr{D}\} \tag{7.5.3}$$

实际上，利用(7.5.2)，上式右边等于

$$\max_{1 \leqslant k_1 < \cdots < k_i \leqslant 2^n} \min\{e(S_{k_1},x),\cdots,e(S_{k_i},x)\}$$
$$= \max_{1 \leqslant k_1 < \cdots < k_i \leqslant 2^n} e(S_{k_i},x)$$
$$= e(S_i,x) = \theta_i(x)$$

因此，$\theta(x)$的各分量都是连续函数。

定义7.5.1 合作对策的核子 Nu(v)就是使 $\theta(x)$按字典序达到最小的那种分配之全体，即

$$\mathrm{Nu}(v) = \{x \in \mathrm{E}(v) \mid \theta(x) \leqslant_L \theta(y), \forall\ y \in \mathrm{E}(v)\} \tag{7.5.4}$$

按照这个定义，在核子中，优先考虑最不满意（或怨言最多）的联盟，选择的分配要使这种联盟的怨言达到最小；在此基础上，再考虑次不满意的联盟，所选分配要使其不满意程度尽可能地小，如此等等。依照这种思想，令

$$X_0 = E(v)$$

$$X_1 = \{x \mid x \in X_0, \theta_1(x) = \min_{y\in X_0}\theta_1(y)\} \tag{7.5.5}$$

一般地，令

$$X_k = \{x \mid x \in X_{k-1}, \theta_k(x) = \min_{y\in X_{k-1}} \theta_k(y)\},$$

$$k = 1, 2, \cdots, 2^n \tag{7.5.6}$$

依此可递归地定义出集合序列 $X_0, X_1, \cdots, X_{2^n}$. 显然，

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_{2^n}. \tag{7.5.7}$$

由于 X_0是非空紧集，$\theta_1(x)$连续，所以 X_1是非空紧集。再由 $\theta_2(x)$的连续性得知 X_2是非空紧集。依此类推，$X_1, X_2, \cdots, X_{2^n}$都是非空紧集。不难看出

$$X_{2^n} = \mathrm{Nu}(v) \tag{7.5.8}$$

实际上，设 $x \in X_{2^n}$，任取 $y \in \mathrm{E}(v)$，如果 $\theta(x) \neq \theta(y)$，设 $\theta_k(x)$是第一个与 $\theta_k(y)$不同的分量，即当 $i<k$ 时，$\theta_i(y)=\theta_i(x)$，且 $\theta_k(y) \neq \theta_k(x)$. 于是 $y \in X_{k-1}$，再由 X_k 的定义知道，$\theta_k(x)<\theta_k(y)$，所以，$\theta(x) <_L \theta(y)$. 因此，对于每一 $y \in \mathrm{E}(v)$，都有 $\theta(x) \leqslant_L \theta(y)$。这表明 $x \in \mathrm{Nu}(v)$，从而证明了 $X_{2^n} \subset \mathrm{Nu}(v)$。另一方面，设 $x \in \mathrm{Nu}(v)$，根据(7.5.4)，$x \in E(v)$。假如 $x \overline{\in} X_{2^n}$，设 k 为满足 $x \overline{\in} X_k$ 的最小自然数。于是，当 $i<k$ 时，$x \in X_i$. 特别地，$x \in X_{k-1}$，再由 X_k 的定义及 x

$\in X_k$ 知道存在 $y\in X_{k-1}$，使得 $\theta_k(y)<\theta_k(x)$。而由(9.5.7)，当 $i<k$ 时，$\theta_i(x)=\theta_i(y)$。所以，$\theta(y)\underset{L}{<}\theta(x)$，这与 $x\in \mathrm{Nu}(v)$ 矛盾。因此，$X_{2^n}\supset \mathrm{Nu}(v)$。(7.5.8)得证。

利用(7.5.7)，马上得到核子的存在性与唯一性定理。

定理7.5.1 任何合作对策的核子必非空，且只由一点组成。

证明 X_{2^n} 的非空性已经说明。为了证明唯一性，注意到，在 X_{2^n} 上 $\theta_1(x),\theta_2(x),\cdots,\theta_{2^n}(x)$ 均为常数。特别地，对于 X_{2^n} 中的任意两点 x,y，有

$$e(i,x)=e(i,y),\quad i=1,2,\cdots,n$$

由此立即得到 $x=y$，唯一性得证。

注：在上面的论述中，可用 R^n 上一般的非空紧集 X 代替分配集合 $\mathrm{E}(v)$，从而得到与 X 有关的核子 $\mathrm{Nu}(X)$. 由于上面只用到 $\mathrm{E}(v)$ 的非空性和紧性。所以 $\mathrm{Nu}(X)$ 仍非空，且只由一点组成。

核子的计算可通过求解一系列线性规划来完成。首先，为了求出(7.5.5)的 X_1，考虑线性规划问题

$$\left.\begin{array}{ll}\min & \alpha\\ \text{s.t.} & x(S)+\alpha\geqslant v(S),\quad S\in I^0\\ & x\in E(v)\end{array}\right\}\qquad(7.5.9)$$

其中 $I^0=\mathscr{P}(N)$ 是 N 的子集之全体。由于该规划的第一个约束等价于

$$\alpha\geqslant\theta_1(x)$$

所以其最优解之全体即为 X_1，最优值等于 $\alpha^1=\min\limits_{y\in \mathrm{E}(v)}\theta_1(y)$. 如果 X_1 只由一点组成，则它就是核子。在一般情况下，令

$$I^1=\{S\,|\,e(S,x)=\alpha_1,\forall\ x\in X_1\}$$

即超出值在 X_1 上取常数值 α^1 的那种联盟之全体。为确定 I^1，可考虑 $|I^0|$ 个线性规划 $(S\in I^0)$

$$\left.\begin{array}{ll}\min & e(S,x)\\ s.t. & x\in X_1\end{array}\right\}\qquad(7.5.10)$$

如果对应于 S 的规划之最优值为 α_1，则 $S\in I^1$，否则 $S\notin I^1$. 由此及 α_1 的定义亦可看出 $I^1\neq\varnothing$. 至此，已对核子中的 x 求出了 $\theta(x)$ 的前 $|I^1|$ 个分量（均为 α_1）、(7.5.1)中的 $S_1,S_2,\cdots,S_{|I^1|}$ 和(7.5.6)中的 $X_1,X_2,\cdots,X_{|I^1|}$（都等于 X_1）. 为了求出 $X_{|I^1|+1}$，考虑线性规划

$$\left.\begin{array}{lll}\min & \alpha & \\ \text{s.t.} & x(S)+\alpha\geqslant v(S), & S\in I^0-I^1 \\ & x\in X_1 & \end{array}\right\}\quad(7.5.11)$$

类似地，该规划的最优解之全体为(7.5.6)中的 $X_{|I^1|+1}$. 记其最优值为 α_2. 如果 $X_{|I^1|+1}$ 只由一点组成，则它就是核子。在相反的情况下，求出

$$I^2=\{S\,|\,S\in I^1,e(S,x)=\alpha_2,\forall\ x\in X_{|I^1|+1}\}$$

从而得到 $\theta(x)$ 的第 $|I^1|+1,\cdots,|I^1|+|I^2|$ 个分量（都为 α_2）以及 $X_{|I^1|+1},\cdots,X_{|I^1|+|I^2|}$（都等于 $X_{|I^1|+1}$）. 按此方法继续下去，最终可求出核子。

应当指出，虽然计算核子的这种方法在理论上是可行的，但真正实现这一算法时将相当费时。首先，得求出一些线性规划的所有最优解，这虽然可以做到，但计算量很大。其次，要求解的线性规划个数有 $o(4^n)$ 之多，所以当 n 稍大时，这近乎无法实现。鉴于此，一些文献致力于研究一些特殊对策核子的其它更易于实现的算法。请参阅[8]、[9]和[24]。

下面我们不加证明地叙述一个属于 Kohlberg[7] 的定理，利用它可以很简单地验证一个分配是否为核子。

设 $x\in E(v)$，如果 $\theta(x)$ 的 2^n 个分量取 q 个不同的值：

$$\alpha_1>\alpha_2>\cdots>\alpha_q,$$

则令

$$b_i=\{S\,|\,S\neq\varnothing,e(S,x)=\alpha_i\},i=1,2,\cdots,q\quad(7.5.12)$$

$$b_0=\{\{i\}\,|\,x_i=v(i)\}$$

显然，

$$\bigcup_{i=1}^{q} b_i = \mathscr{P}(N) - \{\varnothing\}$$

定理7.5.2(Kohlberg)　设 $x \in E(v)$，x 为核子的充要条件是：对于每个 $k=1,2,\cdots,q$，都存在均衡类 c_k，满足

$$\bigcup_{i=1}^{k} b_i \subset c_k \subset \bigcup_{i=1}^{k} b_i \cup b_0 \qquad (7.5.13)$$

例1　考虑四人对策 (N,v)，其中特征函数 v 定义为

$v(1234) = 2,$

$v(123) = v(124) = v(134) = v(234) = 1,$

$v(12) = v(34) = v(14) = v(23) = 1,$

$v(13) = 1/2, v(24) = 0,$

$v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = v(\varnothing) = 0.$

取分配 $x=(1/2.1/2,1/2,1/2)$，则

$b_0 = \varnothing,$

$b_1 = \{1234,12,34,14,23\},$

$b_2 = \{123,124,134,234,13,1,2,3,4\},$

$b_3 = \{24\}.$

容易验证，$b_1, b_1 \cup b_2, b_1 \cup b_2 \cup b_3$ 都是均衡类。因此，x 满足条件(7.5.13)，故为核子。

例2　在上例中将 $v(123)$ 改为5/4，其余不变，则类似地可以验证(5/8,3/8,5/8,3/8)是核子。

例3　考虑(0,1)规范对策 (N,v)，其中 v 满足

$$v(S) \leqslant \frac{|S|-1}{n}, \quad \varnothing \neq S \neq N \qquad (7.5.14)$$

这时核子必为 $(1/n,1/n,\cdots,1/n)$.

实际上，如记 $x=(1/n,1/n,\cdots,1/n,)$，则对于所有除 N 之外的联盟 S，

$$e(S,x) \leqslant \frac{|S|-1}{n} - \frac{|S|}{n} = -\frac{1}{n}.$$

如果 $y \neq x$，则必有 y 的某分量 y_i 满足 $y_i < 1/n$，但在这种情况下，$e(i,y) = -y_i > -1/n$，所以 $\theta(y) \underset{L}{>} \theta(x)$. 因此，$x$ 是核子。

下面再来看核子与其它解的概念之间的关系。首先，我们有

定理7.5.3 对于任何合作对策 v，核子必落在核与最小核心的交中，即

$$Nu(v) \subset K(v) \cap LC(v).$$

因此，$K(v) \cap LC(v) \neq \varnothing$. 特别地，当对策的核心非空时，它必与核相交。

证 设 x 为核子，只需证明对于任一非空的强 ε-核心，有 $x \in K(v) \cap C_\varepsilon(v)$.

首先，设 $y \in C_\varepsilon(v)$，则对于任一联盟 S，$e(S,y) \leqslant \varepsilon$，于是

$$\max_{S \subset N} e(S,x) = \theta_1(x) \leqslant \theta_1(y) = \max_{S \subset N} e(S,y) \leqslant \varepsilon,$$

故 $x \in C_\varepsilon(v)$.

其次，采用反证法证明 $x \in K(v)$. 假定 $x \bar{\in} K(v)$，根据定义，存在一对局中人 i, j，满足

$$s_{ij}(x) > s_{ji}(x), \text{且 } x_j > v(j)$$

取 δ：

$$0 < \delta < \min\left\{\frac{1}{2}[S_{ij}(x) - S_{ji}(x)], x_j - v(j)\right\}$$

再作 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) = x(\delta)$，其中

$$[x(\delta)]_k = \begin{cases} x_k, & k \bar{\in} \{i,j\}; \\ x_i + \delta, & k = i; \\ x_j - \delta, & k = j. \end{cases} \tag{7.5.15}$$

显然，$y \in E(v)$. 下面按字典序比较 $\theta(x)$ 与 $\theta(y)$ 的大小。

首先，注意到，对于任一 $S \subset N$，有如下三种情况：

i) 当 $S \in \mathscr{T}_{ij}$ 时，$e(S,y) = e(S,x) - \delta$；

ii) 当 $S \in \mathscr{T}_{ji}$ 时，$e(S,y) = e(S,x) + \delta$；

iii) 当 $S \bar{\in} \mathscr{T}_{ij} \cup \mathscr{T}_{ji}$ 时，$e(S,y) = e(S,x)$.

因此，从 $\theta(x)$ 变到 $\theta(y)$，只需改变那些含 i 和 j 其中之一的联盟的超出值，而保持其它联盟的超出值不变。

由于

$$\begin{aligned} s_{ij}(y) &= \max_{S\in\mathscr{T}_{ij}} e(S,x)-\delta \\ &= s_{ij}(X)-\delta > s_{ji}(x)+\delta \\ &= \max_{S\in\mathscr{T}_{ji}} e(S,x)+\delta = s_{ji}(y), \end{aligned}$$

所以，比较向量 $\theta(x)$ 与 $\theta(y)$ 时，$\theta(y)$ 的与 $\theta(x)$ 不同的最大分量必为 $\mathscr{T}_{ij}$ 中某联盟 S_c 的超出值，而

$$e(S_c,y) = e(S_c,x) - \delta < e(S_c,x)$$

所以，$\theta(y) \underset{L}{<} \theta(x)$. 与 x 为核子矛盾。

从这个定理立即推得核的非空性，进而由定理7.4.2推得谈判集的非空性。这样就用纯代数的方法证明了谈判集的存在，而且实际上还给出了求出其中一点的具体方法。另一方面，该定理也表明，凡是核中分配满足的性质，核子也满足。所以对于核子也有类似于定理7.4.3的结论。

我们把核子的性质总结如下：

1） 给每个对策定义了唯一的支付向量；

2） 满足个体合理性与群体合理性；

3） 处于对称地位的局中人所得支付相同；

4） 哑元所得为零。

显然，Shapley 值也具有上面这些性质。但应注意，核子并不满足 Shapley 值遵守的可加性，这是 Shapley 值与核子的一个重要区别。如何在上面几个性质的基础上，再附加一个或几个类似于可加性的条件，对核子象 Shapley 值一样地加以公理化？这是一个尚未解决的问题，最近 Potter[16]在这方面取得了一定的进展。

直观说来，核子可比作若干个数的中位数，而 Shapley 值是这些数的平均值，因此两者一般并不相同。

定理7.5.3的证明也为我们提供了寻找核中一点的另一种方法：任取 $x^0 \in E(v)$，如果 $x^0 \overline{\in} K(v)$，则存在一对局中人 i 和 j，使得 $s_{ij}(x^0) > s_{ji}(x^0)$，且 $x_j^0 > v(j)$. 再取

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}[s_{ij}(x^0) - s_{ji}(x^0)], x_j^0 - v(j)\right\}$$

依(7.5.15)作出 $x^1 = x^0(\delta)$. 显然，有 $s_{ij}(x^1) \geqslant s_{ji}(x^1)$ 和 $x_j^1 \geqslant v(j)$，且至少有一个等号成立。所以直观上看，x^1 比 x^0 更接近于符合核中之点的要求。如果 $x^1 \overline{\in} K(v)$，那么类似地可作出 x^2，x^3 等等。这样得到的序列 $\{x^n\}$ 恰好体现了局中人之间动态的讨价还价过程。它是否收敛到核中的点呢？这是 Maschler 于60年代末在一次国际对策论会议上提出的问题，后来 Stearn[21] 作出了肯定的回答，并提出如下更加一般的谈判集概念。它实际上是将对策看成是一般的谈判过程。

定义7.5.2 设 (N,v) 为 n 人合作对策。假定对于每两个局中人的有序对 (i,j) 都有一个定义在分配集 $E(v)$ 上的非负实函数 $d_{ij}(x)$，满足

$$d_{ij}(x) \leqslant x_j - v(j)$$

（称为需求函数。）将这 $n^2 - n$ 个函数放在一起构成集合 $D = \{d_{ij}\}$，定义

$$M_D(v) = \{x \in E(v) \mid d_{ij}(x) = 0\} \qquad (7.5.16)$$

并称之为对策 v 关于 D 的谈判集。

定义中的 $d_{ij}(x)$ 一般表示当就分配 x 进行讨论时，i 要求从 j 处索取给自己的数量。所以，当有某个 $d_{ij}(x)$ 大于零时，最后的分配结果肯定不同于 x. 这就是定义(7.5.16)的 $M_D(v)$ 作为谈判集的理由。

如果取

$$d_{ij}(x) = \begin{cases} \min\left\{\frac{1}{2}[s_{ij}(x) - s_{ji}(x)], x_j - v(j),\right\} & s_{ij}(x) \geqslant s_{ji}(x) \\ 0, & s_{ij}(x) < s_{ji}(x) \end{cases}$$

则 $d_{ij}(x)=0$当且仅当

$$[s_{ij}(x) - s_{ji}(x)][x_j - v(j)] \leqslant 0$$

因此,这时的 $M_D(v)$就是核 $K(v)$.

再取

$$d_{ij}(x) = \min\{\alpha | x(\alpha) \in M_{ij}(v)\}$$

其中 $x(\alpha)$由(7.5.15)定义,表示在 x 中局中人 j 向 i 转移 α 个单位之后所得的向量;M_{ij}定义为

$M_{ij}(v)=\{y|$关于 y,i 对 j 的任一异议都要遭受 j 对 i 的反异议$\}$

$M_{ij}(v)$显然是个闭集。此外,我们还有

$$M_D(v) = \bigcap_{i\neq j} M_{ij}(v) = M_1^i(v)$$

因此,第三节讨论的谈判集也是这种更一般谈判集的特殊情形。

参 考 文 献

[1] Aumann R, Maschler M. The bargaining set for cooperative games. Advances in Game Theory. Ann. of Math. Studies. No. 52, 1964. 443—476

[2] Chun Y. On the symmetric and weighted Shapley values. Intern. J. Game Theory. 1991(20): 183—190

[3] Davis M, Maschler M. The kernel of a cooperative games. Naval Research Logistics Quarterly, 1965(12): 223—259

[4] Dubey P. On the Uniqueness of Shapley value, Intern. J. Game Theory, 1975(4): 131—139

[5] Dubey P, Neyman A, Weber R. Value theory without efficiency. Math. Oper. Res, 1981(6): 122—128

[6] Grotte J H. Observations on the nucleolus and the central games . Intern. J. Game Theory, 1972(1): 173—177

[7] Kohlberg E. On the nucleolus of a characteristic function game. SIAM J. Appl. Math., 1971(20): 62—66

[8] Legros P. Computation of the nucleolus of some bilateral market

games. Intern. J. Game Theory, 1987(16): 1—14

[9] Littlechild S C. A simple expression for the nucleolus in a special case. Intern. J. Game Theory, 1974(3): 21—29

[10] Maschler M, Peleg B, Shapley L S. Geometric properties of the kernel, nucleolus and related solution concepts, Math. Oper. Res., 1979(4): 303—337

[11] Maschler M, Peleg B, Shapley L S. The kernel and bargaining set for convex games, Intern. J. Game Theory, 1971(1): 73—93

[12] Myerson R. Graphs and cooperation in games. Math. Oper, Res., 1977 (2): 225—229

[13] Neyman A, Weber R. Value theory without efficiency. Math. Oper. Res., 1981(6): 122—128

[14] Owen G. Multilinear extension of games, Management Sci., 1972(18): 64—79

[15] Peleg B. Existence theorem for the bargaining set M_1^i. Bull, Amer. Math. Soc., 1963(69): 109—110

[16] Potter A M. An aximatization of the nucleolus, Intern. J. Game Theory, 1990(19): 365—373

[17] Sankaran J K. On Finding the nucleolus of a N—person cooperative game Intern. J. Game Theory, 1990(19): 329—338

[18] Schmeidler D. The nucleolus of a characteristic function games, SIAM J. Appl. Math., 1969(17): 1163—1170

[19] Shapley L S, Shubik. A method for evaluating the distribution of power in committee system. Amer Politi. Sci. Review, 1954(48): 787—792

[20] Shimyalis Ch. Coincidence of the kernal and nucleolus of a centered games. Lithwanian Math. J. 1982(22): 101—104

[21] Stearn R E. Convergent transfer schemes for n-person games. Trans Amer. Math. Soc., 1968(134): 449—459

[22] 王建华. 对策论. 清华大学出版社, 1986

[23] 黄振高. 凸对策的最佳分解. 湖南数学年刊, 1988(1—2): 10—15

[24] 张建高. 广义对称对策的核仁. 应用数学学报, 1990(1): 1—6

第八章　没有旁支付假设的对策

§1 引　言

在前面两章，我们作了这样一个旁支付假设：各局中人都用相同的尺度来衡量他们的赢得(或称效用)，而且各联盟的所得，可以按任意方式分配给它的各个参加者，即效用可以自由地从一个人转移给另一个人。这一假设使我们在描述对策时作了很大的简化：仅用一个实数 $v(S)$ 来表示联盟 S 中各成员联合在一起时的各种可能性，然后将问题化成如何将总收入分配给各局中人使得他们愿意合作在一起。

但是，在许多场合旁支付假设并不成立。在有些情况下，现实环境里根本不存在对各局中人都通用的尺度(货币)，这时联盟的"总收入"就失去了意义；在另一些情况下，虽然有通用的货币存在，但局中人之间不可能(或不允许)通过金钱的诱惑(或行贿)来达到合作的目的。不管是哪一种情况，都已经不能用单个实数来表示联盟的所有可能性，通常也不能用一个代表联盟的"最好"效果的支付向量来表示，而只能用一个支付向量的集合来表示合作时联盟中各成员所能获得的支付之全体。经这样推广之后所得到的

对策称为效用不可转移的对策或 NTU[①]对策（严格定义见定义10.1.1），而前两章研究的有旁支付假设的对策通常叫作普通对策。只有两个局中人的 NTU 对策已在第三章作了研究。

为了下面的叙述方便，先引入一些记号。设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 仍为局中人集合，$S\subset N$，用 R^S 表示从 S 到 R 的实函数之全体，即 $|S|$ 维的欧氏空间，其中每个向量的各分量都用 S 中的元素作为足标。对于 $x,y\in R^N(=R^n)$，用 x^S 表示 x 在 R^S 上的投影，即把 x 限制在 S 上所得的向量。$x^S\geqslant y^S$ 表示对一切 $i\in S$，都有 $x_i\geqslant y_i$；而 $x^S>y^S$ 表示对一切 $i\in S$，$x_i>y_i$. 最后，记

$$R_+^S=\{x\in R^S|x\geqslant 0\}$$

$$R_{++}^S=\{x\in R^S|x>0\}$$

定义8.1.1 一个 n 人 NTU 对策是二元偶 (N,V)（或简记为 V），其中特征函数 V 是一个多值映射，它将每一个联盟 S 映成 R^N 的一个子集 $V(S)$，满足

i) $V(S)=\varnothing \Leftrightarrow S=\varnothing$；

ii) 对一切 $S\subset N$，$V(S)$ 是闭集；

iii) $x\in V(S)$，$y^S\leqslant x^S\Rightarrow y\in V(S)$；

iv) 对于 N 的每一非空子集 S，集合 $\{x^S|x\in V(S)-\bigcup_{i\in S}\mathrm{int}\,V(i)\}$ 非空且有界，其中 $\mathrm{int}V(i)$ 表示 $V(i)$ 的内部。

条件 ii) 称为"广泛性"，指的是：如果联盟 S 能获得支付 x，则它也能得到比 x 小的支付 y，ii) 的一个直接推论是 $V(S)$ 是一个"柱体"，可表示成 R^{N-S} 与 R^S 中一个子集的直积。有些对策论文献也采用另一种处理方法：把 $V(S)$ 定义作 R^S 的子集。这样作的一个缺点是不同的 $V(S)$ 处于不同的空间，从而给一些定义或公式的叙述带来了不便。采用现在这种处理方法除了记号上的便利之外，还有利于对 NTU 对策作几何上的描述（图8.1.1）。

① Nontransferable Utility 的缩写。

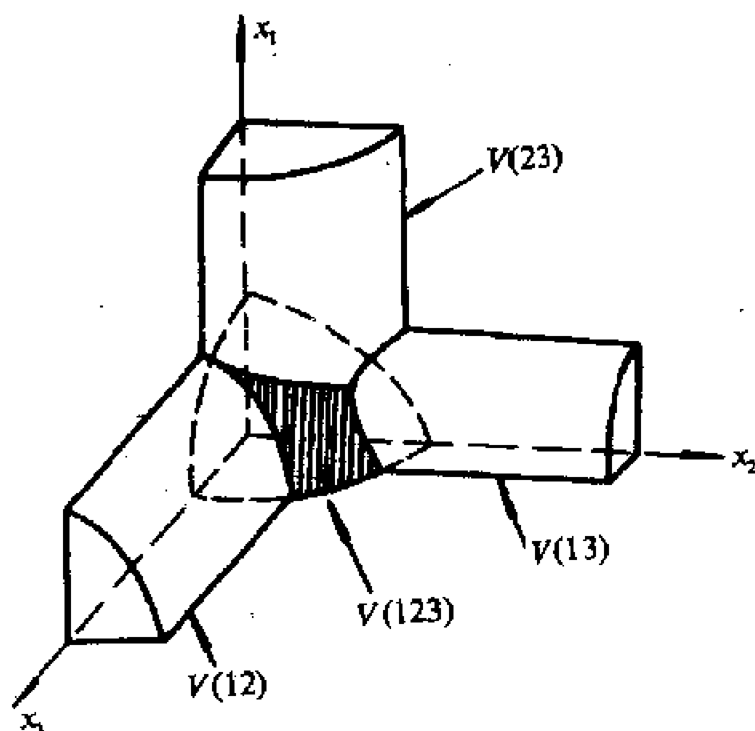


图8.1.1　特征函数的几何表示

由条件 iv)知各 $V(i)$都不是整个空间。于是 $V(i)$可表示为$\{x\in R^N|x_i\leqslant v_i\}$，其中 v_i 是固定的实数。有时也将对策“规范化”：令诸 v_i 为0，则

$$V(i)=\{x\in R^N|x_i\leqslant 0\}$$

有些作者根据不同的目的要求 $V(S)$是凸的或 V 满足如下的超加性：

$$V(S)\cap V(T)\subset V(S\cup T),\quad S\cap T=\varnothing \tag{8.1.1}$$

虽然这些条件实际也常常是满足的，但在 NTU 对策的定义中还是不作这些假定。

对于普通的合作对策(N,f)，可将它看成是一种特殊的 NTU 对策(N,V_f)，其中

$$V_f(S)=\{x\in R^N|x(S)\leqslant f(S)\} \tag{8.1.2}$$

在应用中常常会遇到一种称为有限生成的 NTU 对策，它可表示为

$$V(S)=\{x \mid \text{存在 } y \in Y(S) \text{ 使 } x^S \leqslant y^S\}$$

其中$\{Y(S)\}_{S\subset N}$是 R^N 中的一组有限集。容易验证，V 满足定义中的四个条件。

如果某对策已以策略型 $\Gamma=(N,\{S_i\},\{P_i\})$给出，则有两种方法导出相应的 NTU 对策。为说明这一点，我们用 X_S 表示联盟 S 的所有联合混合策略之全体。

对策 Γ 的 α-特征函数定义为

$$V_\alpha(S)=\bigcup_{x\in X_S}\bigcap_{y\in X_{N-S}}\{\xi\in R^N \mid \xi_j\leqslant P_j(x,y),\forall\ j\in S\}, \tag{8.1.3}$$

按照这个 NTU 对策 V_α，联盟 S 可以得到支付向量 ξ 当且仅当 S 可以找到这样一个策略 x，使得只要 S 采用这个策略，就不管 S 之外的局中人采取什么策略，S 中各人都可以获得至少是 ξ_j 的支付。所以，α-特征函数体现了各局中人悲观的合作行为。

对策 Γ 的 β-特征函数定义为

$$V_\beta(S)=\bigcap_{y\in X_{N-S}}\bigcup_{x\in X_S}\{\xi\in R^N \mid \xi_j\leqslant P_j(x,y),\forall\ j\in S\} \tag{8.1.4}$$

按照这个 NTU 对策 V_β，联盟 S 可以得到支付向量 ξ 当且仅当不管 S 之外的局中人采取什么策略，S 里面的成员总是可以联合作出反应，使得 S 中的局中人 j 所得至少是 ξ_j. 因此，β-特征函数体现了各成员乐观的合作行为。

例1（联盟问题） A 和 B 必须联合作出决定，让其中一人给 C 寄去现金200元。如果他们不能达成协议，则每人罚款300元，与此同时，C 必须给 A 或 B 寄去200元。这里我们假定局中人之间不能作现金转移。

联盟 AB 的支付矩阵如下：

		C 的 策 略	
		$C\to A$	$C\to B$
联盟的策 略			
	$A\to C$	0,0	−200,200
	$B\to C$	200,−200	0,0
	未达成协议	−100,−300	−300,−100

其中第一个数表示 A 的所得，第二个数表示 B 的所得。我们先来看 $V_\alpha(AB)$。联盟 AB 的第一个策略可保证获得(−200,0)，第二个策略可得(0,−200)，第三个策略可得(−300,−300)。一般地，如果联盟采用混合策略(P_1,P_2,P_3)，则它能保证联盟的两个成员获得支付$(-200P_1-300P_3,-200P_1,-300P_3)$。令 $P_3=0$，则联盟可获得图8.1.2对角线上任何一点所代表的支付。因此 $V_\alpha(AB)$就是图中左下方的阴影部分。

再考虑 $V_\beta(AB)$，C 的第一个策略使 B 的所得无法比0多，C 的第二个策略使 A 的所得无法比0多。因此，图中画了斜线的那部分区域都是些无法实现的支付向量。除了这个区域之外，其余的支付都是可以通过乐观行为而获得的支付。实际上，如果 C 以概率 P_1和 P_2采用它的两个策略，则 AB 可以混合策略$(P_1,P_2,0)$作出反应，致使实现支付(200，−200)和(−200,200)的概率都是 p_1p_2，从而期望支付为(0,0)，因此 $V_\beta(AB)$就是画斜线区域的补，即第四象限(含边界)。

对于一般的 NTU 对策，象第八章所作的一样，仍假定最大的联盟 N 形成。于是，问题就变成如何从 $V(N)$中选出一个支付向量作为对策的最终结局。

这里首要的一个概念是 Pareto 最优性，称 $x\in C$ 在 C 上 Pareto 最优，如果不存在 $y\neq x$ 使得对一切 $i\in N$，$y_i\geq x_i$. 我们认为从

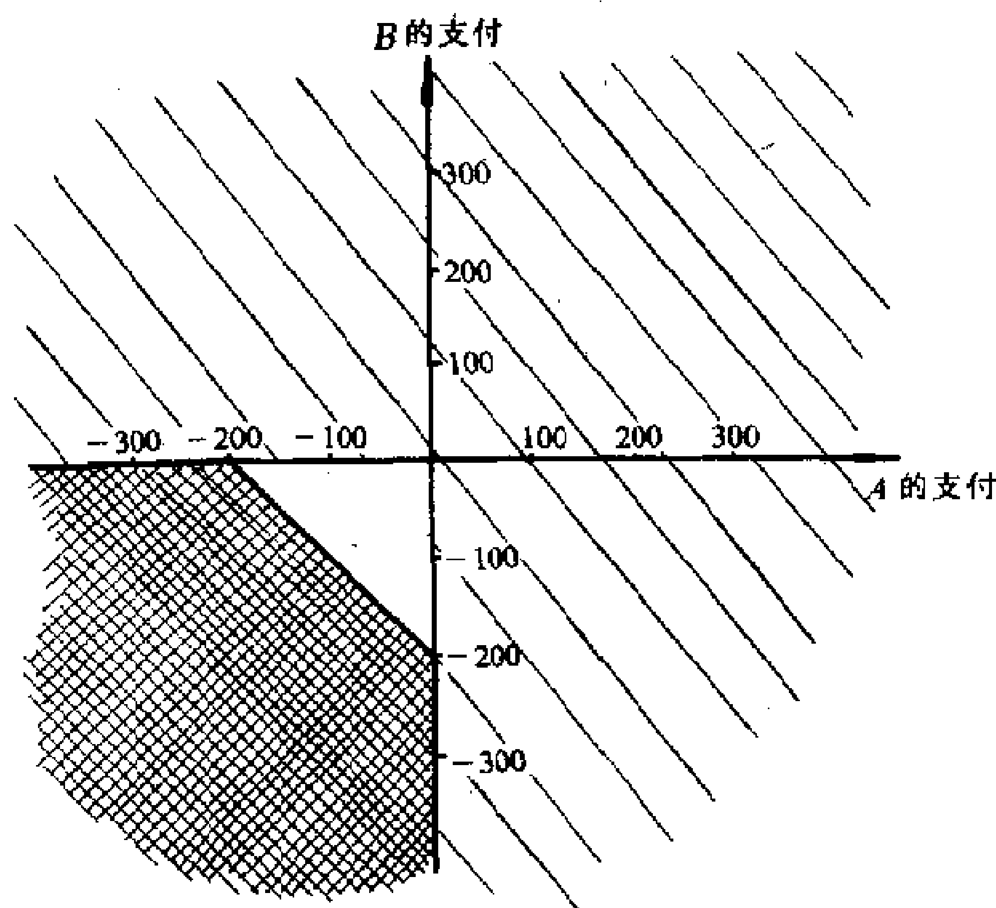


图8.1.2

$V(N)$中选出的支付(向量)首先应当满足 Pareto 最优性,因为在相反的情况下,可以找到另一个支付向量,使得各局中人所得都不比原来的少,而且至少有一个人所得更多。

其次,同样可以引入优超的概念。设 $x,y\in V(N)$. 称 x 优超 y(记为 $x\succ y$),如果存在联盟 S 使得 $x\in V(S)$且 $x^S>y^S$. 在此基础上,可以引入核心和稳定集的概念。核心是 $V(N)$中不可优超的支付之全体,记为 $C(N,V)$或 $C(V)$,即

$$C(N,V)=\{x\,|\,x\in V(N),\text{不存在}\ S\ \text{及}\ y\in V(S)\ \text{使}\ y^S>x^S\} \tag{8.1.5}$$

也可以写成

$$C(N,V)=V(N)-\bigcup_{S\subset N}\operatorname{int}V(S) \qquad (8.1.6)$$

稳定集是指 $V(N)$ 中满足内部稳定性和外部稳定性的子集，其中内部稳定性是指该集中任何两个支付都没有优超关系；外部稳定性是指集合外的任一支付都要被集合里面的某支付优超。

关于稳定集，Stearn[13]曾经证明所有满足超加性的三人 NTU 对策都有稳定集。另一方面，他也得到一个没有稳定集的七人 NTU 对策。

关于核心，下一节作详细的研究（针对核心的非空性）。这里只提出两个与核心有关的概念，即均衡 NTU 对策和凸 NTU 对策。

(N,V) 称为均衡的 NTU 对策，如果对于 N 上的任一均衡类 $\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$，有如下的包含关系：

$$\bigcap_{i=1}^{m}V(S_i)\subset V(N) \qquad (8.1.6)$$

应当注意，(8.1.6)对所有的均衡类成立当且仅当它对所有极小均衡类成立。这是因为任一均衡类都是在一极小均衡类中再加入一些集合，而这只会使 $\bigcap V(S)$ 变小。另外，如果对策满足超加性，那么只须对非剖分的极小均衡类验证(8.1.6)。

均衡 NTU 对策的这种定义可看作第八章普通均衡对策的推广。事实上，假定 (N,f) 是一个普通的合作对策。如按(8.1.2)将它看成一个 NTU 对策 (N,V_f)，则 (N,V_f) 是均衡的充要条件是对于 N 的每一极小均衡类 b，有

$$x(S)\leqslant f(S),\ \forall\ S\in b\Rightarrow x(S)\leqslant f(N)$$

这等价于线性规划

$$\max \quad x(N) \qquad (8.1.7)$$

$$\text{s.t.} \quad x(S)\leqslant f(S),S\in b \qquad (8.1.8)$$

的最优值不超过 $f(N)$. 根据对偶定理，这又等价于规划

$$\min \quad \sum_{S\in b}\lambda_S f(S) \qquad (8.1.9)$$

$$\text{s.t.} \qquad \sum_{\substack{s\in b\\ S\ni i}} \lambda_S = 1, i \in N \tag{8.1.10}$$

$$\lambda_S \geqslant 0, S \in b \tag{8.1.11}$$

的最优值不超过 $f(N)$。但是，由于 b 是极小均衡类，(8.1.10)－(8.1.11)只有唯一解 $\{\lambda_S\}_{S\in b}$，且满足 $\lambda_S > 0$，于是最优值为 $\sum_{s\in b}\lambda_S f(S)$。因此，$(N, V_f)$是均衡的 NTU 对策当且仅当对于每一极小均衡类 b 及其唯一的均衡系数$\{\lambda_S\}_{S\in b}$，有

$$\sum_{S\in b}\lambda_S f(S) \leqslant f(N),$$

即(N, f)是均衡对策(参考定理6.5.4)。

另一类与核心有关的对策是凸 NTU 对策。称 NTU 对策(N, V)是凸的，如果

$$V(S) \cap V(T) \subset V(S \cup T) \cup V(S \cap T), \quad S, T \subset N \tag{8.1.12}$$

不难验证，这种凸性是第八章所论普通对策凸性的推广，换言之，如果(N, f)是有旁支付假设的合作对策，则(N, V_f)是凸 NTU 对策。

§2 核　心

对策论的一个中心问题是确定出一些有意义的对策类型，使它们具有非空的核心。本节的目的正在于此。

首先考虑如何将第八章的定理6.5.4推广到 NTU 对策上来。为此，先将著名的 Knaster—Kuratowski—Mazurkiewicz 定理(简称 K－K－M 定理，见附录)推广为 K－K－M－S 定理，后者是 Shapley 于1973年发现的。

下面我们用 $e^1, e^2, \cdots, e^n$ 表示 R^n 中的 n 个单位向量。又设 A

为 R^n 的单位单纯形。对于 $S\subset N$，我们用

$$A^S=\text{conv}\{e^i|i\in S\}$$

表示所有 $e^i(i\in S)$的凸包，于是 $A=A^N$.

定理8.2.1(K－K－M－S)　设$\{C^S|S\subset N\}$是 A 的一族闭子集，满足

$$\bigcup_{T\subset S}C^T\supset A^S,\quad \forall\, S\subset N \tag{8.2.1}$$

则存在 N 上的一个均衡类 b，使得

$$\bigcap_{S\in b}C^S\neq\varnothing \tag{8.2.2}$$

在证明这个定理之前，要作两点说明。第一，如果在定理中对于$|S|>1$令 $C^S=\varnothing$，则 K－K－M－S 定理就变成 K－K－M 定理。第二，在定理的结论中可以要求 b 是极小均衡类，因为用 b 的一个极小均衡类代替 b 只会使$\bigcap_{S\in b}C^S$ 增大。

证[①]　作一个定义在 A 上取值为 N 的子集类的函数 L：

$$L(x)=\{S|x\in C^S\} \tag{8.2.3}$$

其中 C^S 是满足(8.2.1)的 A 的闭子集。于是，对于 $x\in A^T$，$L(x)$至少含有 T 的一个子集。显然，只需证明存在 $x\in A$，使得 $L(x)$包含一个均衡类。

另一方面，如用

$$m^S=\frac{1}{|S|}\sum_{i\in S}e^i$$

表示 A^S 的重心，则容易验证集类 b 中含有一个均衡类当且仅当

$$m^N\in\text{conv}\{m^S|S\in b\}$$

因此，作集值映射 $G:A\to\mathscr{P}(A)$：

$$G(x)=\text{conv}\{m^S|S\in L(x)\} \tag{8.2.4}$$

而要证明的是存在 $x\in A$ 使得

---

① 本证明是 Shapley1987年来华讲学时提出的。

$$m^N \in G(x) \qquad (8.2.5)$$

下面设法用 Kakutani 不动点定理证明这一点。

证明的思路是这样的，把 A 嵌入到一个比 A 大一些的单纯形 A'，然后在 A' 上构造一个"Kakutani"集值映射，使它的不动点全部落在 A 中且满足(8.2.5)。

首先，G 的图像$\{(x,G(x))|x\in A\}$显然是闭的，且对于每个 $x\in A$，$G(x)$都是非空的紧凸集。因此，$G(x)$是一个取值为紧凸集的上半连续集映。

其次，定义集映 $F:A\to\mathscr{P}(\overline{A})$：

$$F(x)=x+m^n-G(x)^{①}$$

其中 $\overline{A}$ 表示 A 所在的超平面，即

$$\overline{A}=\{x\in R^n|x(N)=1\}$$

集映 F 仍具有上半连续性，且对每一 $x\in A$，$F(x)$是非空的紧凸集。但是 F 的值域可能超出了 A 而跑到 $\overline{A}$ 中。

F 已具有所需要的一个性质，这就是 F 的不动点满足(8.2.5)。但是 F 的定义域和值域不一样，所以要先适当扩大 F 的定义域，然后才能使用 Kakutani 不动点定理。

因此，作一个大一点的单纯形 A'：

$$A'=\{x\in R^n|x(N)=1,x_i\geqslant -1,i\in N\}.$$

由于 $A'\supset A+A-A$，故由 F 的定义知道 $A'\supset F(A)$.

下面再定义一个将 A' 收缩成 A 的函数 $h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)$：

$$h_i(y)=\frac{\max(0,y_i)}{\sum_{j\in N}\max(0,y_j)} \qquad (8.2.6)$$

显然，h 是连续的，而且对于 $x\in A$，$h(x)=x$.

接着，作函数 L'，将 L 的定义域扩充到 A'：

---

① 这里及以下："－"指代数运算，而不是集合运算。

$$L'(y)=\{S \mid S\in L(h(y)),y_i\geqslant 0,\forall\ i\in S\}$$

对于 $y\in A'$，如记 $T=\{i \mid y_i\geqslant 0\}$，则 $h(y)\in A^T$，于是由(8.2.1)，存在 $S\in L(h(y))$ 且 $S\subset T$，从而 $S\in L'(y)$。因此，$L'(y)$始终非空。另外，L' 在 A 上显然与 L 重合。再类似地定义

$$G'(y)=\operatorname{conv}\{m^S \mid S\in L'(y)\} \qquad (8.2.7)$$

易见 G' 仍是取值为非空紧凸集的上半连续集映射。

至此，我们已可作出期望已久的"Kakutani"函数 F'：

$$F'(y)=h(y)+m^N-G'(y). \qquad (8.2.8)$$

它具有如下几个性质：

1) 对于每个 $y\in A'$，$F'(y)$是非空的紧凸集；

2) F' 上半连续；

3) 对一切 $x\in A$，$F'(x)=F(x)$；

4) 对一切 $x\in A'$，$F'(x)\subset A'$；

5) $x'\in F'(x)$且 $x\in A\Rightarrow x$ 满足(8.2.5)；

6) $x\in F'(x)\Rightarrow x\in A$.

其中1)、2)和3)在上面一连串的定义中已作了说明；4)可从 $h(x)\in A$ 和 $G'(x)\subset A$ 推得；5)可从3)直接导出；为证明6)，设 $x\in A'/A$，由 A' 的定义，存在 $i\in N$ 使 $x_i<0$. 于是由(8.2.6)，$h_i(x)=0$. 再由 L' 的定义知，对于 $S\in L'(x)$，有 $i\overline{\in} S$，从而 $m_i^S=0$. 由此推得，当 $y\in G'(x)$时，$y_i=0$. 因此，根据 F' 的定义，如果 $Z\in F'(x)$，则存在 $y\in G'(x)$ 满足

$$z_i=h_i(x)+m_i^N-y_i=0+\frac{1}{n}-0>0>x_i$$

这表明 $z\neq x$，即 x 不是 F' 的不动点。

最后，由性质1)、2)和4)，可用 Kakutani 不动点定理。于是存在 $x^*\in A'$ 满足 $x^*\in F'(x^*)$。由6)，$x^*\in A$. 再由5)，x^* 满足(8.2.5)。定理得证。

以 K－K－M－S 定理为基础，已可证明 Scarf[9]于1967年发

现的一个著名结果。

定理8.2.2 均衡 NTU 对策的核心非空。

Scarf 发现这一结果时采用的是构造性证明，源于 Lemke 和 Howson 计算双矩阵对策平衡点的方法（见第四章）。下面的证明属于存在性证明，是 Shapley 于1973年提出的。

定理8.2.2的证明　设 V 是一个均衡的 NTU 对策。为书写方便，假定该对策已经规范化，于是

$$V(i)=\{x\in R^n \mid x_i\leqslant 0\},\quad i\in N \tag{8.2.9}$$

由 NTU 对策的定义，可取到充分大的数 M，使得对每一 $S\subset N$，

$$x\in V(S)-\bigcup_{i\in S}\mathrm{int}V(i)\Rightarrow\quad x_i\leqslant M,\quad \forall\, i\in S \tag{8.2.10}$$

重新定义 A^S 为 $\{-nMe^i \mid i\in S\}$ 的凸包，下面将在新的单纯形 A^N 上使用 K－K－M－S 定理。

首先，必须作出集合 C^S。为此定义

$$t(x)=\sup\{t\mid x+te\in\bigcup_{S\subset N}\mathrm{int}V(S)\},\quad x\in R^N \tag{8.2.11}$$

其中 e 是各分量都是1的向量。因为当 t 充分大时，对一切 $i\in N$ 有 $(x+te)_i\geqslant 0$，所以

$$x+te\,\overline{\in}\bigcup_{S\subset N}\mathrm{int}V(S)\ \text{和}\ x+te\in V(S)-\bigcup_{i\in N}\mathrm{int}V(i)$$

中必有一个成立。因此由(8.2.10)，$t(x)$有限。另外，$t(x)$是个连续函数，而且还满足

$$x+t(x)e\,\overline{\in}\bigcup_{S\subset N}\mathrm{int}V(S) \tag{8.2.12}$$

其次，定义

$$C^S=\{x\in A \mid x+t(x)e\in V(S)\} \tag{8.2.13}$$

因为 $t(x)$是连续函数，所以 C^S 是闭集。下面证明 C^S 满足(8.2.1)。

设 $x\in A^T\subset A^N$，由 $t(x)$的定义知道

$$x + t(x)e \in \overline{\bigcup_{S\subset N} \text{int}V(S)} = \bigcup_{S\subset N} V(S)$$

于是存在 $S\subset N$ 使 $x+t(x)e\in V(S)$，即 $x\in C^S$. 我们断言 $S\subset T$. 实际上，由 $T\neq\varnothing$和 $x(T)=-nM$ 知道存在 $j\in T$ 使得 $x_j<-M$，比如 $x_j=-M-\varepsilon$，其中 $\varepsilon>0$. 这时，由(8.2.9)知，当 $t<M+\varepsilon$ 时，$x+te\in \text{int}V(j)\subset\bigcup_{S\subset N}\text{int}V(S)$。因此，由(7.2.11)，

$$t(x) \geqslant M + \varepsilon > M \qquad (8.2.14)$$

再由(7.2.12)，$x+t(x)e\overline{\in}\bigcup_{i\in s}\text{int}V(j)$. 由此及 $x+t(x)e\in V(S)$ 和(7.2.10)，得

$$x_i + t(x) \leqslant M, i \in S$$

因此，对一切 $i\in S$，$x_i<0$。但 $x\in A^T$，所以必有 $S\subset T$，从而证明了 C^S 满足(8.2.1)。

应用 K－K－M－S 定理，存在均衡类 b 及 $x_0\in R^n$，使得对一切 $S\in b$ 都有 $x_0\in C^S$. 于是

$$\alpha = x_0 + t(x_0)e \in \bigcap_{S\in b} V(S)$$

又由于 V 是均衡的，故 $\alpha\in V(N)$，最后由(8.2.10)及核心的表示法(8.1.6)知 α 是核心中的支付。因此核心非空，定理得证。

与定理6.5.4不同，定理8.2.2的逆并不成立，这从下面的例子可以看出。

例1　考虑三人 NTU 对策 V：

$$V(12) = \{x|x_1 \leqslant 4, x_2 \leqslant 3\};$$
$$V(23) = \{x|x_2 \leqslant 3, x_3 \leqslant 3\};$$
$$V(13) = \{x|x_1 \leqslant 4, x_3 \leqslant 3\};$$
$$V(123) = \{x|x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 10\};$$
$$V(i) = \{x|x_i \leqslant 0\}, i = 1,2,3.$$

容易验证，V 满足超加性。现考虑均衡类$\{12,23,13\}$及 $x_0=(4,3,3)$. 显然

$$(4,3,3) \in V(12) \cap V(13) \cap V(23)$$

但$(4,3,3)\overline{\in}V(N)$，所以 V 并非均衡对策。虽然，V 的核心非空，因为

$$(0,4,3)\in V(N)-\bigcup_{S\subset N}\mathrm{int}V(S)$$

这表明定理8.2.2的条件并不必要。

Billera 曾试图推广定理8.2.2的条件，以使之成为核心非空的充要条件。对这方面有兴趣的读者可参阅[3]。

另一类核心非空的对策是凸 NTU 对策，这自然是普通凸对策相应结论(定理6.4.2)的推广，它最初由 Vilkov[14]发现，后来被 Peleg 加强。这里提出的证明是 Greenberg[4]为进一步推广这一结果而提出的。

定理8.2.3 如果 NTU 对策 V 是凸的(即满足(8.2.12))，则其核心 $C(V)$ 非空。

证 为了便于用归纳法证明这一结论，我们列出定理的所有条件(包括 NTU 对策定义中的条件)：

(a) 对一切 $S\subset N$，$V(S)$是闭集；

(b) $V(S)=\varnothing\Leftrightarrow S=\varnothing$；

(c) $x\in V(S)$，$y^S\leqslant x^S\Rightarrow y\in V(S)$；

(d) 对一切 $S\subset N$，集合$\{x^S\mid x\in V(S)-\bigcup_{i\in S}\mathrm{int}\,V(i)\}$非空且有界；

(e) $V(S)\cap V(T)\subset V(S\cup T)\cup V(S\cap T)$，　$S,T\subset N$.

现将(a)用一个较弱的条件：

(f) $V(N)$是闭集。

来代替。暂且把满足(b)—(f)的(N,V)称为广义凸对策。下面证明比定理8.2.3更强的结论：

$$(N,V)\text{ 是广义凸对策}\Rightarrow C(N,V)\neq\varnothing \qquad (8.2.15)$$

当 $n=1$时，令 $\bar{x}=\max\{x\mid x\in V(N)\}$. 由($e$)和($f$)知 $\bar{x}$ 属于核心。现假定结论对于只有 $n-1$个局中人的广义凸对策成立，下

面证明它对于具有 n 个局中人的广义凸对策也成立。设 (N,V) 是这样一个"对策"，定义

$M=\{1,2,\cdots,n-1\}=N-n$;

$t=\sup\{x_n|x\in V(n)\}$;

$P(S)=\{x\in R^M|(x,\delta)\in V(S),\delta\in R\}, S\subset M$;

$W(S)=\{x\in R^M|\exists\ t'>t$ 使 $(x,t')\in V(S\cup n)\},\quad S\subset M.$

再作 (M,U) 如下：

$$U(\varnothing)=\varnothing,$$

$$U(M)=\{x\in R^M|(x,t)\in V(N)\},$$

$$U(S)=W(S)\cup P(S),\quad \text{如果}\ \varnothing\neq S\neq M$$

我们先断言

$$U(M)\supset P(M) \tag{8.2.16}$$

事实上，设 $x\in P(M)$，由 t 的定义和(c)，存在序列 $t_k\to t$ 满足 $(x,t_k)\in V(n)$，$\forall\ k$. 再由 $x\in P(M)$ 知道 $(x,t_k)\in V(M)$，$\forall\ k$. 于是从(e)推得 $(x,t_k)\in V(N)$，$\forall\ k$. 令 $k\to\infty$，并利用(f)，得 $(x,t)\in V(N)$，因此 $x\in U(M)$，(8.2.16)得证。

其次，我们证明 (M,U) 满足(b)－(f)。为证(b)，注意当 $S\neq\varnothing$ 时，$P(S)\neq\varnothing$，于是由 U 的定义及(8.2.16)知(b)成立。(c)、(d)和(f)都极易验证。下面证明 (M,U) 满足(e).

设 $S,T\subset M$，$x\in U(S)\cap U(T)$. 显然，可以假定 $S\neq M\neq T$，以下分三种情况：

1) $x\in P(S)\cap P(T)$：这时，$\forall\ \delta\in R$，$(x,\delta)\in V(S)\cap V(T)$，由于 V 满足(e)，故 $(x,\delta)\in V(S\cup T)\cup V(S\cap T)$. 所以，$x\in P(S\cup T)\cup P(S\cap T)\subset U(S\cup T)\cup U(S\cap T)$。

2) $x\in P(S)\cap W(T)$ 或 $W(S)\cap P(T)$：以前者为例，这时存在 $t'>t$ 使 $(x,t')\in V(S)\cap V(T\cup n)$. 由于 V 满足(e)，故 $(x,t')\in V(S\cup T\cup n)\cup V(S\cap T)$. 因此，$x\in W(S\cup T)\cup P(S\cap T)\subset U(S\cup T)\cup U(S\cap T)$。

3) $x\in W(S)\cap W(T)$：这时存在 $t'>t$ 使 $(x,t')\in V(S\cup n)\cap V(T\cup n)\subset V(S\cup T\cup n)\cup V((S\cap T)\cup n)$. 如果 $(x,t')\in V(S\cup T\cup n)$，则 $x\in W(S\cup T)\subset U(S\cup T)$。如果 $(x,t')\in V((S\cap T)\cup n)$，则由 $t'>t$ 知 $S\cap T\neq\varnothing$. 因此 $x\in W(S\cap T)\subset U(S\cap T)$. 总之，$x\in U(S\cap T)\cup U(S\cup T)$。

至此，已可应用归纳假设于 (M,U). 于是存在 $x\in C(M,U)$. 特别地，$x\in U(M)$，即 $(x,t)\in V(N)$. 我们证明 (x,t) 不被其它支付向量通过非 N 的联盟优超。假如不然，则存在 $T\neq N$、$z\in R^M$ 和 $t'\in R$，使得 $z^M>x^M$，$t'>t$ 且 $(z,t')\in V(T)$. 如果 $n\bar{\in} T$，则 $z\in P(T)\subset U(T)$，这连同 $z^M>x^M$ 一起与 $x\in C(M,U)$ 矛盾。如果 $n\in T$，则 $T-n\neq\varnothing$，因为由 $t'>t$ 可推知 $(z,t')\bar{\in} V(n)$. 因此，$z\in W(T-n)\subset U(T-n)$，这连同 $z^{T/n}>x^{T/n}$ 一起仍与 $x\in C(M,U)$ 矛盾。

最后，在 $V(N)$ 的边界上选择一个 $y\in V(N)$ 使 $y^N\geqslant(x,t)^N$，显然，$y\in C(V)$.

例2 设

$$N=\{1,2,3,4,5,6\},$$
$$K=\{2,3,4,5\},$$
$$b=\{124,135,236,456\}.$$

定义 NTU 对策 (N,V) 如下：

$$V(\varnothing)=\varnothing$$

如果不存在 $T\in b$ 使 $S\supset T$，则

$$V(S)=\{x\in R^6\mid x_i\leqslant 0, i\in S\}$$

如果存在 $T\in b$ 使 $S\supset T$，则

$$V(S)=\{x\in R^6\mid x(S)\leqslant 1 \text{ 且 } x_i\leqslant 0, i\in S\cap K\}$$

这样定义的 NTU 对策不是均衡的，但是凸的。实际上，b 是极小均衡类，权向量为 $(1/2,1/2,1/2,1/2)$。设 $y=(1,0,0,0,0,1)$，则显见 $y\bar{\in} V(N)$ 且 $y\in\bigcap_{S\in b}V(S)$，故 (N,V) 不是均衡的。为说明 (N,V)

是凸的，设 $x\in V(S)\cap V(T)$. 如果 $S\cup T\not\supset 16$，则 $x\in V(S\cup T)$，所以我们假定 $S\cup T\supset 16$. 如果 $S\supset 16$或 $T\supset 16$，则 $x\in V(S\cup T)$. 如果 $x_1=0$或 $x_6=0$，则 $x\in V(S\cup T)$. 最后假定 $x_1>0, x_6>0$，且$1\in S-T, 6\in T-S$. 这时，由于 b 中联盟两两相交，所以由 V 的定义，$S\cap T\neq\varnothing$，再由$1,6\overline{\in} S\cap T$ 知道 $x\in V(S\cap T)$.

本例(及例1)表明定理8.2.2与定理8.2.3互不包含。

§3 Shapley 转移值

在前面两节我们已经看到，核心与稳定集这两个概念可以很自然地推广到NTU 对策上来，有关核心与稳定集的部分结果还与普通对策的情况极为相似。但是，对于 Shapley 值，结果就没有这么理想了。迄今为止至少有三种方法可把 Shapley 值推广到NTU 对策上来。这里仅介绍其中的一种，即 Shapley 提出的转移值方法。

设(N,V)是一个 NTU 对策，先考虑如何将它化成一个普通对策，一种很自然的方法是令

$$v(S)=\sup_{x\in V(S)} x(S),\qquad S\subset N, \tag{8.3.1}$$

得到普通对策 (N,v)，接着求出其 Shapley 值 $\varphi(v)=(\varphi_1(v),\cdots,\varphi_n(v))$就作为 NTU 对策$(N,v)$的最终结局。然而，这样得到的结果 $\varphi(v)$未必能为联盟 N 所达到，即未必有 $\varphi(v)\in v(N)$成立。同时，(8.3.1)中 $x(S)$所代表的 和 $\sum_{i\in S}x_i$ 不一定有意义，因为在NTU 对策中，各局中人用以衡量其所得(效用)的尺度不一定相同。

鉴于这种情况，我们选择一个“效用尺度”向量 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)>0$，用以将各局中人的效用化成相同的单位。于是令

$$v_\lambda(S)=\sup_{x\in V(S)}\sum_{i\in S}\lambda_i x_i,\quad S\subset N \tag{8.3.2}$$

得到普通对策(N,v_λ)，其 Shapley 值向量为 $\varphi(v_\lambda)=(\varphi_1(v_\lambda)\cdots\varphi_n(v_\lambda))$. 用各局中人原来的尺度来表示，这就是 $\varphi(N,v;\lambda)$或 $\varphi(v;\lambda)$，其第 i 个分量为

$$\varphi_i(V;\lambda)=\frac{\varphi_i(v_\lambda)}{\lambda_i} \tag{8.3.3}$$

如果 $\varphi(v;\lambda)$对于大联盟 N 是可行的，即 $\varphi(v;\lambda)\in v(N)$，则称 $\varphi(v;\lambda)$为对策 v 的一个 Shapley 转移值。

为研究 Shapley 转移值的存在性，引入记号：

$$B(v(S))=\{\lambda\mid\sup_{x\in v(S)}\sum_{i\in S}\lambda_i x_i<+\infty\},\quad S\subset N \tag{8.3.4}$$

$$B(v)=\bigcap_{S\subset N}B(v(S)) \tag{8.3.5}$$

$$B_1(v)=\left\{\lambda\in B(v)\mid\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1\right\} \tag{8.3.6}$$

$B((v(S))$可以看成是 $v(S)$在 R^S 上的投影的"障碍锥"，即该投影的支撑超平面的法向量之全体。由(8.3.2)定义的普通对策有意义当且仅当 $\lambda\in B(v)$。对 $B(v)$中的向量加以规范化就得到 $B_1(v)$.

由 $v(N)$的广泛性知道 $B(v(N))CR^N_+$. 但在这一节，我们假定

i) $B(V(N))\subset R^N_{++}$

这相当于假定 $v(N)$的任一支撑超平面都不与坐标轴平行。除此之外，还假定

ii) $B(v)\supset B(v(N))$

iii) $V(N)$是由有限个超平面围成的凸集(称为多面凸集)。

假设 ii)等价于 $B(v)=B(v(N))$；iii)是个较强的假设，但对于一般的闭凸集，可用一系列多面凸集去逼近它。

在上面三个假设之下，有

引理8.3.1 (a) $B(v)$是多面凸集(从而 $B_1(v)$是紧凸集)；

(b) 对于每一 $S\subset N$，$v_\lambda(S)$是 λ 在 $B_1(v)$上的连续凸函数。

证 (a) 假定 $v(N)$ 可表示为

$$v(N)=\{x\in R^n \mid \langle a_i,x\rangle\leqslant \alpha_i, i=1,2,\cdots,m\}$$

先证明，$\lambda\in B(v(N))$ 的充要条件是

$$\langle a_i,x\rangle\leqslant 0, i=1,2,\cdots,m\Rightarrow\langle\lambda,x\rangle\leqslant 0 \qquad (8.3.7)$$

事实上，考虑如下的线性规划问题：

$$L(\alpha):\quad\begin{cases}\max & \langle\lambda,x\rangle\\ \text{s.t.} & \langle a_i,x\rangle\leqslant\alpha_i, i=1,2,\cdots,m\end{cases}$$

它依赖于参数 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$. 显然，$\lambda\in B(v(N))$ 的充要条件是 $L(\alpha)$ 的最优值有限，而(8.3.7)等价于 $L(\alpha)$ 有有限的最优值(即0). 但 $L(\alpha)$ 与 $L(0)$ 的对偶规划有相同的可行集：

$$\left\{(y_1,\cdots,y_m)\mid\sum_{i=1}^m y_i a_i=\lambda, y_i\geqslant 0\right\}$$

所以，$L(\alpha)$ 有最优解当且仅当 $L(0)$ 有最优解。因此，$\lambda\in B(v(N))$ 的充要条件是(8.3.7)成立。

其次，考虑线性规划

$$\begin{aligned}\max\quad & \langle\lambda,x\rangle\\ \text{s.t.}\quad & \langle a_i,x\rangle\leqslant 0, i=1,2,\cdots,m\\ & -1\leqslant x_j\leqslant 1, j=1,2,\cdots,n\end{aligned} \qquad (8.3.8)$$

易见(8.3.7)成立当且仅当(8.3.8)有非正的最优值。现记(8.3.8)可行集的极点之全体为 $\{b_1,b_2,\cdots,b_l\}$. 根据线性规划里的熟知结论，(8.3.8)的最优值为 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant l}\langle\lambda,b_k\rangle$。因此，$\lambda\in B(v(N))$ 当且仅当对一切 $k=1,2,\cdots,l$，$\langle\lambda,b_k\rangle\leqslant 0$，亦即

$$B(V(N))=\{\lambda\mid\langle\lambda,b_k\rangle\leqslant 0, k=1,\cdots,l\}$$

于是(a)得证。

(b) 任意固定一个 $S\subset N$，记 $f(\lambda)=v_\lambda(S)$。由 v_λ 的定义易知 f 是凸的。对于任一实数 α，集合

$$\{\lambda\mid f(\lambda)\leqslant\alpha\}=\bigcap_{x\in V(S)}\left\{\lambda\mid\sum_{i\in S}\lambda_i x_i\leqslant\alpha\right\}$$

显然是闭的，因而 f 下半连续。为证明(b)，尚需证明 f 在 $B_1(V)$ 上上半连续。

先证 f 在 $B_1(V)$ 上有上界。由(a)，可以将 $B_1(V)$ 表示成

$$B_1(V) = \{\lambda | \langle d_i,\lambda\rangle \leqslant \beta_i, i = 1,\cdots,l\}$$

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 为 $B_1(V)$ 的极点之全体。由 $B_1(V)$ 的有界性及凸集表示定理(见附录)，每一 $\lambda\in B_1(V)$ 可表示为

$$\lambda = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_m\xi_m$$

其中 $c_1,\cdots,c_m\geqslant 0, c_1+c_2+\cdots+c_m=1$，因此，如取 $M=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} f(\xi_i)$，则

$$f(\lambda) \leqslant \sum_{i=1}^{m} c_i f(\zeta_i) \leqslant \sum_{i=1}^{m} c_i M = M$$

这就证明了 f 有上界。

其次，任取 $B_1(V)$ 中的一个收敛点列 $\lambda_k\to\bar\lambda$. 由于 $\bar\lambda\in B_1(v)$，不妨设

$$\langle d_i,\bar\lambda\rangle = \beta_i, \quad i = 1,2,\cdots,p \tag{8.3.9}$$

$$\langle d_j,\bar\lambda\rangle < \beta_j, \quad j = p+1,\cdots,l \tag{8.3.10}$$

取一个正数序列 $\{\varepsilon_k\}$，使之满足

$$\varepsilon_k\to 0, \quad \frac{1}{\varepsilon_k}(\lambda_k - \bar\lambda)\to 0 \tag{8.3.11}$$

再作一个点列 $\{\lambda_k'\}$：

$$\lambda_k' = \bar\lambda + \frac{1}{\varepsilon_k}(\lambda_k - \bar\lambda), \quad k = 1,2,\cdots$$

显然，当 $i=1,2,\cdots,p$ 时，

$$\langle d_i,\lambda_k'\rangle = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_k}\right)\beta_i + \frac{1}{\varepsilon_k}\langle d_i,\lambda_k\rangle \leqslant \beta_i$$

而当 $i=p+1,\cdots,l$ 时，由(8.3.10)和(8.3.11)知道，只要 k 充分大，就有

$$\langle d_i,\lambda_k'\rangle < \beta_i, \quad i = p+1,\cdots,l$$

因此，当 k 充分大时，$\lambda_k'\in B_1(V)$。最后，由 $\lambda_k=\varepsilon_k\lambda_k'+(1-\varepsilon_k)\bar{\lambda}$ 及 f 的凸性、有界性得到

$$f(\lambda_k)\leqslant \varepsilon_k f(\lambda_k')+(1-\varepsilon_k)f(\bar{\lambda})\leqslant \varepsilon_k M+(1-\varepsilon_k)f(\bar{\lambda})$$

令 $k\to\infty$，并利用(8.3.11)，得

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} f(\lambda_k)\leqslant f(\bar{\lambda})$$

因此，f 上半连续。

引理8.3.2 设 $\lambda\in B(v)$，则

(a) $\langle\lambda,\varphi(V;\lambda)\rangle=v_\lambda(N)$；

(b) $\varphi(V;\lambda)\bar{\in}\mathrm{int}V(N)$.

证 (a) 从 $\varphi(V;\lambda)$的定义立得。

(b) 如果 $\bar{x}\in\mathrm{int}V(N)$，则

$$\langle\lambda,\bar{x}\rangle<\sup_{x\in V(N)}\langle\lambda,x\rangle=v_\lambda(N)$$

再结合(a)即得(b).

现任取 $x^0\in\mathrm{int}\ V(N)$，记

$$t^\lambda=\max\{t\in[0,1]\mid t\varphi(V;\lambda)+(1-t)x^0\in V(N)\} \tag{8.3.12}$$

这里最大值可以取到是由于 $V(N)$是闭集。由 $\varphi(V;\lambda)\bar{\in}\mathrm{int}\ V(N)$ 和 $x^0\in\mathrm{int}\ V(N)$ 可知 $t^\lambda>0$. 显然，我们的目的是选择一个 $\lambda\in B(V)$使得 $t^\lambda=1$.

引理8.3.3 t^λ 连续地依赖于 $\varphi(v;\lambda)$.

证明 设原点 O 是凸集 K 的内点，则不难验证 Minkowski 函数

$$g(K;x)=\inf\left\{s>0\mid \frac{x}{s}\in K\right\}$$

在 R^n 上连续。由于 t^λ 可表示为

$$t^\lambda=\frac{1}{g(V(N)-x^0;\varphi(V;\lambda)-x^0)}$$

故结论成立。

以下，记

$$y^\lambda = t^\lambda\varphi(V;\lambda) + (1-t^\lambda)x^0 \tag{8.3.13}$$

由 t^λ 的作法知道 y^λ 处于 $V(N)$的边界上。现在定义集值映射 T：$B_1(V)\to B_1(V)$：

$$T(\lambda) = \{\xi\in B_1(V)\mid x\in V(N)\Rightarrow\langle x,\xi\rangle\leqslant\langle y^\lambda,\xi\rangle\} \tag{8.3.14}$$

换言之，T 将 λ 映成通过 y^λ 的 $V(N)$的支撑超平面之法向量的全体，如图8.3.1所示。

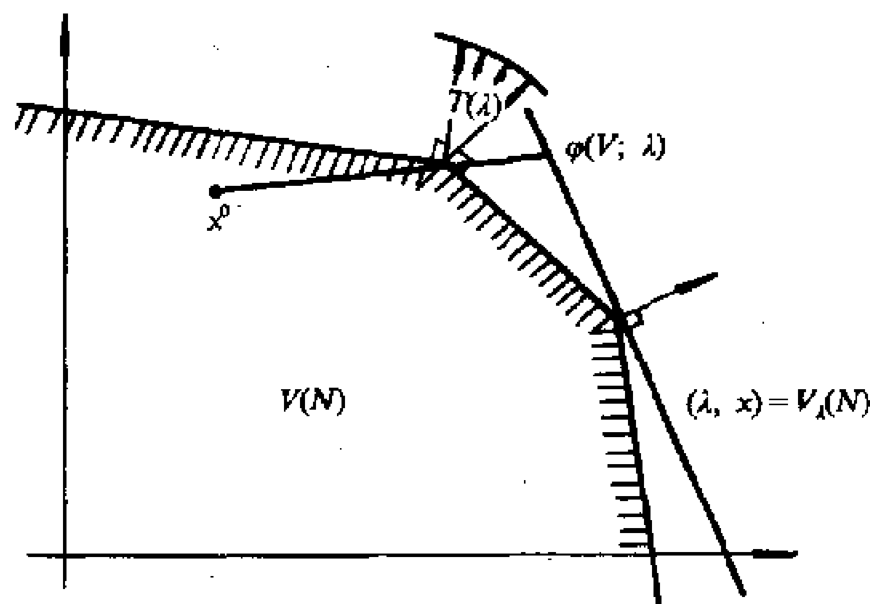


图8.3.1

引理8.3.4 (a) 对于 $\lambda\in B_1(V)$，$T(\lambda)$是非空的紧凸集；
(b) T 是上半连续的集值映射。

证明 (a) 显然，$T(\lambda)$是闭凸集。由于 y^λ 处于凸集 $V(N)$的边界，故必有 y^λ 的支撑超平面，从而 $T(\lambda)$非空。最后由 $T(\lambda)\subset B_1(V)$知道 $T(\lambda)$是紧的。

(b) 设 $B_1(V)$中有两个收敛序列$\{\lambda^k\}$和$\{\xi^k\}$满足

$$\lambda^k\to\bar\lambda,\quad \xi^k\to\bar\xi,\quad \xi^k\in T(\lambda^k) \tag{8.3.15}$$

我们必须证明 $\bar{\xi}\in T(\bar{\lambda})$（由引理8. 3. 1可知 $\bar{\xi},\bar{\lambda}\in B_1(V)$）.

由引理8. 3. 1，对于每个 $S\subset N$，$v_\lambda(S)$是 $B_1(V)$上的连续函数，于是其 Shapley 值作为 $v_\lambda(S)$的线性组合也是 λ 的连续函数，从而 $\varphi(V;\lambda)$关于 λ 在 $B_1(V)$上连续。再由引理8. 3. 3，t^λ 关于 λ 也连续。因此，

$$y^{\lambda^k} = t^{\lambda^k}\varphi(V;\lambda^k) + (1 - t^{\lambda^k})x^0$$
$$\to t^{\bar{\lambda}}\varphi(V;\bar{\lambda}) + (1 - t^{\bar{\lambda}})x^0 = y^{\bar{\lambda}}$$

另一方面，$\xi^k\in T(\lambda^k)$相当于

$$\langle x,\xi^k\rangle \leqslant \langle y^{\lambda^k},\xi^k\rangle, \qquad \forall\, x \in V(N)$$

令 $k\to\infty$得

$$\langle x,\bar{\xi}\rangle \leqslant \langle y^{\bar{\lambda}},\bar{\xi}\rangle, \qquad \forall\, x \in V(N)$$

因此，$\bar{\xi}\in T(\bar{\lambda})$。引理得证。

至此，已可用 Kakutani 不动点定理来证明 Shapley 转移值的存在性。

定理8. 3. 5 在假设 i)、ii)和 iii)之下，必存在 Shapley 转移值，即存在 $\lambda\in R^n_{++}$使 $\varphi(V;\lambda)\in V(N)$.

证 由引理8. 3. 4，集值映射 T 满足 Kakutani 不动点定理里的所有条件，于是存在 $\lambda'\in B_1(V)$使得 $\lambda'\in T(\lambda')$. 下面证明 $\varphi(V;\lambda')\in V(N)$。

事实上，由 T 的定义及引理8. 3. 2，

$$\langle\lambda',y^{\lambda'}\rangle = \sup_{x\in V(N)}\langle\lambda',x\rangle = v_{\lambda'}(N) = \langle\lambda',\varphi(v;\lambda')\rangle$$

而

$$y^{\lambda'} = t^{\lambda'}\varphi(V;\lambda') + (1 - t^{\lambda'})x^0$$

所以

$$(1 - t^{\lambda'})\langle\lambda',\varphi(v;\lambda')\rangle = (1 - t^{\lambda'})\langle\lambda',x^0\rangle \quad (8.3.16)$$

由于 $x^0\in \mathrm{int}V(N)$，故

$$\langle\lambda',x^0\rangle < v_{\lambda'}(N) = \langle\lambda',\varphi(V;\lambda')\rangle$$

因此,(8.3.16)只有当 $t^{\lambda'}=1$时才成立。而在这种情况下,有

$$\varphi(V;\lambda') = y^{\lambda'} \in V(N)$$

定理得证。

可以对更广泛的一类 NTU 对策建立起转移值的概念。但这方面的内容往往要涉及到凸分析中更深入的结果。请参阅[5]、[10]和[8]。

在本节的最后,我们来看如何将 Shapley 转移看成是普通 Shapley 值及 Nash 谈判解的推广。设(N,f)是普通对策,按(8.1.2)将它看成 NTU 对策(N,V_f)。这时容易算得

$$B(V_f) = B(V_f + (N)) = \{(a,\cdots,a)\,|\,a > 0\}$$

因此,对于每一 $\lambda \in B(V_f)$,

$$\varphi(V_f;\lambda) = \varphi(f)$$

即 V_f 只有唯一的 Shapley 转移值 $\varphi(f)$。

再考虑二人谈判问题(d,S)。它亦可以看成是一个二人 NTU 对策(N,V):

$$V(i) = \{x\,|\,x \in R^2, x_i \leqslant d_i\}$$

$$V(N) = S - R_+^N$$

为方便计,设 $d_1=d_2=0$. 这时对于任一 $\lambda \in B(V)$,

$$v_\lambda(1) = v_\lambda(2) = 0$$

$$v_\lambda(12) = \max_{x \in S}(x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2)$$

所以

$$\varphi_1(v_\lambda) = \varphi_2(v_\lambda) = \frac{1}{2}v_\lambda(12)$$

因此,$(u_1,u_2) \in S$ 为 Shapley 转移值当且仅当存在 $\lambda_1,\lambda_2>0$,使得

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = \max_{x \in S}(\lambda_1 x_1 + \lambda_1 x_2) \qquad (8.3.17)$$

和

$$\lambda_1 u_1 = \lambda_2 u_2 \qquad (8.3.18)$$

同时成立。而(8.3.17)和(8.3.18)正是(u_1, u_2)成为 Nash 谈判解的条件。因此，在这种情况下，Shapley 转移值与 Nash 谈判解重合。

至此我们已经看到，Shapley 转移值既是普通对策 Shapley 值的推广，又是二人谈判问题之 Nash 解的推广。

§4 其它解的概念

谈判集及其与之有关的概念（核与核子）也可推广到 NTU 对策上来。首先，只要将异议和反异议的概念适当加以扩充，就可定义 NTU 对策的谈判集 M_1^i，并保证其始终存在。Asscher[2]曾对三人 NTU 对策的谈判集作了研究，但除此之外，我们对谈判集仍一无所知。其次，核与核子的推广很大程度上依赖于超出值函数的推广；虽然存在性仍可保证，但除了存在性之外所知甚少。特别应该提到的是，在核子的所有推广中，唯一性都无法保持下来(参阅 Nakayama[7])。最后，我们仍可采用上一节的办法，先将 NTU 对策化成普通对策，再建立起相应的概念。但是，迄今为止这种方法仅在核子上获得了部分的成功。

参 考 文 献

[1] Aumann R. An axiomatization of non-transferable utility value. Econometrica,1985(53):599～612

[2] Asscher N. An ordinal bargaining set for games without sidepayments. Math. Oper. Res.,1976(1):381－389

[3] Billera L J. Some theorems on the core of a n-person games without side payments. SIAM J. Appl. Math.,1970(18):567－579

[4] Greenberg J. Cores of convex games without sidepayments. Math. Oper. Res. ,1985(10):523—525

[5] Ichiishi T. The effectivity function approach to the core. Contributions to the Mathematical Economics, W. Hildenbrand A. Mas-colell, eds. , Amsterdam:North—Holland,1986

[6] Kern R. The Shapley transfer value without zero weights. Intern. J. Game Theory,1985(14):73—92

[7] Nakayama M. A note on a generalization of the nucleolus to games without sidepayments. Intern. J. Game Theory,1983(12):115—122

[8] Rosenmuller J. The theory of games and markets,Amsterdam,1981

[9] Scarf H. The core of a n—person games. Econometria,1967(35):50—69

[10] Shapley L S. Utility comparision and the theory of games. La decision 2,1969,251—263

[11] Shapley L S. On balanced games without sidepayments. Hu T C, Robinson S M eds. ,Math. programming. Academic press,1973

[12] Sharkey W. Convex games without side payments. Intern. J. Game Theoty,1982(11):101—106

[13] Stearn R E. Three-person cooperative game without side payments. Advances in Game Theory. Ann. Math. Studies. No. 52,1964

[14] Vilkov V B. Convex game wothout side payments,Vestik Leningrad Univ,Math. ,1977

第九章　具有无限多个局中人的对策

在对策论的早期阶段，人们一般局限于研究只有少数几个局中人参与的对策（例如二人、三人或四人对策）。但当我们把对策论用于研究社会或经济现象时，经常要遇到具有大量局中人的对策。例如在选举问题中常常有大量的选民；而在经济问题（见下一章）中常常有大量的“经济人”。因此，自60年代以来，具有大量局中人的对策日益受到重视。在数学上，我们有时把这种对策看成是具有无限多局中人（例如与实轴上的点一样多），有时也将其作为 n 人对策而研究 n 趋于无穷时的极限情形。本章主要讨论前者。

具有无限多局中人的对策（以下简称无限对策）同样可用多种形式来表示，但这里只局限于研究可用特征函数型来表示的合作对策。另外，我们还要象第六、七章一样作旁支付假设，即各局中人都用相同的尺度来衡量他们的赢得，且联盟的赢得可以按任意方式分配给各参加者。在这种假设之下，可用一个数来表示联盟的所得，就象在普通 n 人特征型对策里所作的一样。

本章先研究无限对策特别是凸对策的核心，然后将注意力转向一种特殊无限对策——缺原子对策的值理论。我们假定读者已具备测度论和泛函分析的基本知识。

§1　核　心

从本节开始，我们改用 Ω 表示有限或无限的局中人集合，以

便与前几章一直沿用的有限局中人集合 N 区别开来。为便于数学上的处理，我们不再把 Ω 的任一子集都称为联盟，而要求被称为联盟的那些子集之全体 $\mathscr{A}$ 关于通常的集合运算是封闭的。换言之，要求 $\mathscr{A}$ 满足：

(a) $\Omega\in\mathscr{A}$;

(b) $A\in\mathscr{A}\Rightarrow\Omega-A\in\mathscr{A}$;

(c) $A_i\in\mathscr{A},i=1,2,\cdots\cdots,\Rightarrow\sum_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{A}$.

而只有 $\mathscr{A}$ 中的元素才称为联盟。按照测度论的术语，$\mathscr{A}$ 是一个 σ-代数，而二元偶$(\Omega,\mathscr{A})$称为可测空间。于是联盟实际上就是(该可测空间上的)可测集的同义语。

本章中除特别声明外，所论可测空间都是固定不变的。

有了局中人和联盟的概念之后，我们定义合作对策为这样的实函数 v：

$$v:\mathscr{A}\to R$$

满足 $v(\varnothing)=0$，v 也称为对策的特征函数。因此，一个合作对策由局中人集合 Ω、联盟集合 $\mathscr{A}$ 和特征函数 v 三部分构成，我们常以三元组$(\Omega,\mathscr{A},v)$来表示，在不致引起混淆的情况下也简记为(Ω,v)或 v.

在本章的前面两节，我们始终假定特征函数 v 满足：

(i)非负性：$v(S)\geqslant0,\forall\ S\in\mathscr{A}$;

(ii)σ-连续性：对于 $S_n,S\in\mathscr{A}$，如果 $S_1\subset S_2\subset\cdots$ 且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n=S$ 或 $S_1\supset S_2\supset\cdots$ 且 $\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n=S$，则 $v(S_n)\to v(S_n)(n\to\infty)$.

虽然，读者将会发现，前面两节的某些论述并不依赖于此。我们之所以作这两个假定，主要是为了数学上的方便，避免过于繁琐的叙述。当然，如果把 $v(S)$解释为联盟 S 形成时的所得，那么上述假定也言之成理。

如果 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个 σ 子代数，则称$(\Omega,\mathscr{B},v|_{\mathscr{B}})$为$(\Omega,\mathscr{A}$,

v)的子对策。

如何表示各局中人在对策中的所得，即支付向量呢？一种很自然的推广方法是用定义在 Ω 上的函数来表示。但这种方法不可避免地要涉及到对无限个局中人(未必可列)之所得进行求和(如求出全体局中人所得的总和)，这是一个难于处理的问题。鉴于此，我们用可测空间$(\Omega,\mathscr{A})$上的测度① 来表示支付向量，这当然也是前面几章所论支付向量的推广。

在此基础上，可以类似地定义分配的概念；优超的概念需要重新定义，这里不作论述；核心可按优超关系来定义，但更常用的是采用定理 6.4.1. 的推广形式。

定义 9.1.1 对策$(\Omega,\mathscr{A},v)$的核心定义为满足

$$\mu(\Omega) = v(\Omega)$$

$$\mu(A) \geqslant v(A), \quad \forall\ A \in \mathscr{A}$$

的测度 μ 之全体所成的集合，记为 $C(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 或 $C(\Omega, v)$ 或 $C(v)$.

研究无限对策的核心，常常需要分析中的一些存在性定理。这里我们引用如下属于 KyFan[3]的著名结论，利用它可使某些结论的证明大大简化。

引理 9.1.1(KyFan) 设$\{x_\gamma\}_{\gamma\in I}$是在一个实赋范线性空间 X 中的一族元素(有限或无限)，$\{\alpha_\gamma\}_{\gamma\in I}$是对应的一组实数，则对于任何 $\rho>0$，下面两个条件是等价的：

i)在 X 上存在一个连续线性泛函，它满足 $\|f\|\leqslant\rho$，且

$$f(x_\gamma) \geqslant \alpha_\gamma, (\gamma \in I) \tag{9.1.1}$$

ii)对于 I 的任何有限 n 个指标 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$，以及对于任何 n 个正数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，不等式

---

① 本书中的测度均指满足 σ-可加性的有限集函数。

$$\rho \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\gamma_i} \| \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{\gamma_i} \qquad (9.1.2)$$

成立。

证 由 i)显然能推出 ii)。现仅需证由 ii)能推出 i)。

现假设 ii),先证对于给定的 I 的任何有限个指标 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$,在 X 中存在一个连续线性泛函 f 满足 $\| f \| \leqslant \rho$ 且

$$f(x_{\gamma_i}) = a_{\gamma_i}, i = 1, 2, \cdots, n \qquad (9.1.3)$$

给定指标 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$,在 n 维欧氏空间 R^n 中作凸集

$$P = \{(z_1, \cdots, z_n) | z_i \geqslant a_{\gamma_i}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

和

$$K = \{((fa_{\gamma_1}), \cdots, f(a_{\gamma_n})) | f \in S_\rho^*\}$$

其中 S_ρ^* 为 X 的共轭空间 X^* 中半径为 ρ 的球:

$$S_\rho^* = \{f \in X^* \| |f \| \leqslant \rho\}$$

显然,K 是紧凸集,P 是闭集。设不存在 $f \in S_\rho^*$ 满足(9.1.3)中的所有不等式,则紧凸集 K 与闭凸集 P 不相交,从而这两个凸集可以由 R^n 中的一个超平面严格地分开。所以,存在 $n+1$ 个实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 及 β 使得

$$\| f \| \leqslant \rho, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_{\gamma_i}) \leqslant \beta$$

和

$$y_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (y_i + a_{\gamma_i}) > \beta$$

成立。由第一个不等式可推出

$$\rho \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\gamma_i} \| \leqslant \beta$$

而由第二个不等式可推出

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{\gamma_i} > \beta$$

和

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

因此，这些非负数 λ_i(不可能全为零)满足(9.1.2)的严格的反向不等式，这与条件 ii)矛盾，从而证明了对于(9.1.1)的任何有限子组(9.1.3)，有一个满足 $\|f\| \leqslant \rho$ 的解 $f \in X^*$.

对于 I 的每一非空有限子集 J，令

$$A_J^* = \{f \in S_\rho^* \mid f(x_\gamma) \geqslant \alpha_\gamma, \gamma \in J\}$$

再令 $\mathscr{A}^*$ 为一切集 A_J^* 的族，这里 J 在 I 的一切非空有限子集上变动。在 X^* 的弱*拓扑下，S_ρ^* 是紧集，而且每一个 A_J^* 是 S_ρ^* 的闭子集。由上面所证，$\mathscr{A}^*$ 中任何有限个集合都有一个非空的交集，所以由 S_ρ^* 的弱*紧性，$\mathscr{A}^*$ 的所有集合的交非空。这就证明了存在一个 $f \in S_\rho^*$ 满足(9.1.1)。

推论 9.1.2 设 K_ρ^* 是所有满足(9.1.1)及 $\|f\| \leqslant \rho$ 的 $f \in X^*$ 的集合。若 $K_\rho^* \neq \varnothing$，则对任何元素 $y \in X$，

$$\min\{f(y) \mid f \in K_\rho^*\}$$

等于下述表示式

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_{\gamma_i} - \rho \left\| y - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\gamma_i} \right\|$$

的上确界，其中 $n=1,2,\cdots$；$\gamma_i \in I$，且 $\lambda_i > 0$ 都是变化的。

证 在弱*拓扑下，K_ρ^* 是紧集 S_ρ^* 的一个闭子集，所以也是紧的，因而当 f 在 K_ρ^* 中变动时，$f(y)$的极小存在。其次，令

$$\beta = \min\{f(y) \mid f \in K_\rho^*\}$$

则 β 有下面两个特性：

1)不等式组

$$\begin{cases} \|f\| \leqslant \rho \\ f(x_\gamma) \geqslant \alpha_\gamma, \gamma \in I \\ f(-y) \geqslant -\beta \end{cases}$$

有解，于是利用定理 9.1.1，对于任何 $n=1,2,\cdots$；$\gamma_i \in I$ 及 $\lambda_i > 0$，β 必满足

$$\beta \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_{\gamma_i} - \rho \| y - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\gamma_i} \|$$

2)对于任何 $\varepsilon>0$,不等式组

$$\begin{cases} \| f \| \leqslant \rho \\ f(x_\gamma) \geqslant \alpha_\gamma, \gamma \in I \\ f(-y) \geqslant -\beta + \varepsilon \end{cases}$$

无解,于是利用定理 9.1.1,存在一组正数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 及指标 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$,满足

$$\beta - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_{\gamma_i} - \rho \| Y - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\gamma_i} \|$$

所得两个不等式表明 β 是问题中的上确界。

以下我们经常要涉及到赋范线性空间 $B(\Omega, \mathscr{A})$ 和 $\mathrm{ba}(\Omega, \mathscr{A})$,其中 $B(\Omega, \mathscr{A})$ 是 $(\Omega, \mathscr{A})$ 上有界可测函数的全体,范数定义为

$$\| f \| = \sup_{x \in \Omega} | f(x) |$$

$B(\Omega, \mathscr{A})$ 的共轭空间 $B^*(\Omega, \mathscr{A})$ 等距同构于 $\mathrm{ba}(\Omega, \mathscr{A})$,即 $(\Omega, \mathscr{A})$ 上有界的有限可加集函数的全体,其上范数定义为

$$\| \mu \| = \sup \sum_{i \in I} | \mu(A_i) |,$$

这里上确界对 Ω 的所有有剖分 $\{A_i\}_{i \in I}$ 来取。$\mathrm{ba}(\Omega, \mathscr{A})$ 有一个重要的子空间 $\mathrm{ca}(\Omega, \mathscr{A})$,即 $(\Omega, \mathscr{A})$ 上测度之全体。

定义 9.1.1 (a) 对策 $(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 称为均衡对策,如果对一切 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \geqslant 0$ 以及 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{A}$,由

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i} \leqslant \chi_\Omega \tag{9.1.4}$$

可推出

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v(A_i) \leqslant v(\Omega) \tag{9.1.5}$$

这里及以下,χ_A 表示集合 A 的特征函数,即

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\overline{\in} A\end{cases}$$

$(\Omega,\mathscr{A})$上均衡对策的全体记为$V_b(\Omega,\mathscr{A})$。

(b) 对策$(\Omega,\mathscr{A},v)$称为凸对策，如果对一切$A_1,A_2\in\mathscr{A}$

$$v(A_1)+v(A_2)\leqslant v(A_1\cup A_2)+v(A_1\cap A_2) \quad (9.1.6)$$

$(\Omega,\mathscr{A})$上凸对策的全体记为$V_c(\Omega,\mathscr{A})$。

定理 9.1.3 对策$(\Omega,\mathscr{A},v)$的核心非空当且仅当它是均衡对策。

本定理最初由 Schmeidler 发现并证明，这里给出的证明属于 Kannai[8]。

证 必要性：假定μ是核心中的一个元素。设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\geqslant 0$以及$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{A}$满足(9.1.4)，则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\lambda_i v(A_i)&\leqslant\sum_{i=1}^n\lambda_i\mu(A_i)\\ &=\int_\Omega\Big(\sum_{i=1}^n\lambda_i\chi_{A_i}\Big)\mathrm{d}\mu\\ &\leqslant\int_\Omega\chi_\Omega d\mu=\mu(\Omega)=v(\Omega)\end{aligned}$$

充分性：取$\rho=v(\Omega)$，考虑$B(\Omega,\mathscr{A})$上的线性不等式组

$$f(\chi_S)\geqslant v(S),\quad S\in\mathscr{A} \quad (9.1.7)$$

对于均衡对策$(\Omega,\mathscr{A},v)$，条件(9.1.2)显然满足，于是由定理 9.1.1，不等式组(9.1.7)有一个解f满足$\|f\|\leqslant v(\Omega)$。令

$$\mu(S)=f(\chi_S),$$

则μ满足 i)$\mu(\Omega)=v(\Omega)$和 ii)μ是测度。实际上，i)从

$$\mu(\Omega)=f(\chi_\Omega)\leqslant\|f\|\leqslant v(\Omega)$$

和(9.1.7)马上得出。为说明 ii)，注意到μ是有限可加的。假若有集列$\{S_n\}\subset\mathscr{A}$满足$S_n\downarrow\varnothing$，则由

$$\mu(S_n)=\mu(\Omega)-\mu(\Omega-S_n)$$

$$\leqslant v(\Omega) - v(\Omega - S_n) \to 0$$

和

$$\mu(S_n) \geqslant v(S_n) \geqslant 0$$

知

$$\mu(S_n) \to 0 (n \to \infty)$$

因此 μ 是测度。最后由 i)及(9.1.7)知道，μ 是核心中的元素。

定理 9.1.4 $V_c(\Omega,\mathscr{A}) \subset V_b(\Omega,\mathscr{A})$。

证 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n \geqslant 0, A_1,A_2,\cdots,A_n \in \mathscr{A}$ 满足

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i} \leqslant \chi_\Omega$$

在左边的和式中加入其它一些形如 $\lambda\chi_A$ 的项，可得

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i} = \chi_\Omega \tag{9.1.8}$$

显然，只要证明

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v(A_i) \leqslant v(\Omega)$$

就可以了。

设 $\mathscr{B}$ 为由 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 生成的代数，在 $R^{\mathscr{B}}$ 上定义线性函数

$$R^{\mathscr{B}} \to R$$

$$(\lambda_A)_A \to \sum_{A\in\mathscr{B}} \lambda_A v(A)$$

并用 K 记集合$\{(\lambda_A) \in R_+^{\mathscr{B}} \mid \sum \lambda_A \chi_A = \chi_\Omega\}$，(由于 K 是紧凸集)容易看出 $L=\{(\lambda_A)\in K \mid u(\lambda)=\max u(K)\}$是非空的紧凸集。为证本定理，证明

$$\max_{\lambda\in L} \lambda_\Omega = 1$$

就够了。

假定

$$\lambda_\Omega^0 = \max_{\lambda\in L} \lambda_\Omega < 1$$

那么由(9.1.8)知道，$\mathscr{B}_1=\{A\in\mathscr{B}\mid A\neq\Omega$。且 $\lambda_A^0>0\}$是 Ω 的一个覆盖(即各元素之并包含 Ω)。现记 $\gamma=\min\{\lambda_A^0\mid A\in\mathscr{B}_1\}$，有

$$\sum_{A\in\mathscr{B}}\lambda_A^0 v(A) = \lambda_\Omega^0 v(\Omega) + \sum_{A\in\mathscr{B}_1}\lambda_A^0 v(A)$$

其中右边第二项还可写成

$$\sum_{A\in\mathscr{B}_1}\lambda_A^0 v(A) = \sum_{A\in\mathscr{B}_1}(\lambda_A^0-\gamma)v(A) + \gamma\sum_{A\in\mathscr{B}_1}v(A)$$

根据凸性，$\sum\limits_{A\in\mathscr{B}_1}v(A)\leqslant v(\Omega)+\Sigma$ 混合项。至此已 可看出，

$$\max_{\lambda\in L}\lambda_\Omega \geqslant \lambda_\Omega^0+\gamma>\lambda_\Omega$$

与 λ^0 的选取方式矛盾。因此，$\max\lambda_\Omega=1$，从而 u 在 χ_Ω 处达到最大，定理得证。

注意定理 9.1.4 的逆并不成立。实际上，我们将证明，凸性条件与一个比均衡明显更强的条件等价。

设 $f=\sum_{i=1}^n\lambda_i\chi_{A_i}$ 是 $B(\Omega,\mathscr{A})$ 的一个非负简单函数。可以将 f 表示为 $f=\sum_{j=1}^s\mu_j\chi_{C_j}$，其中 $\mu_j>0$，$C_1\supsetneq C_2\supsetneq\cdots\supsetneq C_s$. 实际上，如令 $C_1=\{\omega\mid f(\omega)>0\}$，$\mu_1=\min\limits_{C_1}f$，则 $f_1=f-\mu_1\chi_{C_1}$，仍为非负简单函数，且满足 $C_1\supsetneq C_2=\{\omega\mid f_1(\omega)>0\}$. 如果 $C_2\neq\varnothing$，则再令 $\mu_2=\min\limits_{C_2}f_1$. 如此继续，经有限步之后即可将 f 表示成所要的形式。显然，这种表示法是唯一的。这个唯一的表达式就称为 f 的典式。

定理 9.1.5 设$(\Omega,\mathscr{A},v)$是一个对策，则下列条件等价。

i) v 是凸的。

ii) 若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m>0$，$B_1,\cdots,B_m\in\mathscr{A}$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n>0$，$A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{A}$ 满足

$$\sum_{k=1}^m\alpha_k\chi_{B_k}\leqslant\sum_{i=1}^n\lambda_i\chi_{A_i}=f$$

则

$$\sum_{k=1}^m\alpha_k v(B_k)\leqslant\sum_{j=1}^s\mu_j v(C_j)$$

其中 $\sum_{j=1}^{s}\mu_j\chi_{C_j}$ 是 f 的典式。

iii) 设 $f=\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\chi_{A_i}$ 的典式为 $\sum_{j=1}^{s}\mu_j\chi_{C_j}$，其中 $\lambda_i\geqslant 0$，$A_i\in\mathscr{A}$，则 $\min_{\mu\in C(v)}\langle f,\mu\rangle=\sum_{j=1}^{n}\mu_j v(C_j)$. 这里测度 μ 也视为共轭空间 $B^*(\Omega,\mathscr{A})$ 上的元素，于是 $\langle f,\mu\rangle=\int_\Omega f\mathrm{d}\mu$.

iv) 若 $C_1\supset C_2\supset\cdots\supset C_s$，其中 $C_j\in\mathscr{A}$，则存在 $\mu\in C(v)$ 使得 $\mu(C_j)=v(C_j)$，$j=1,2,\cdots,s$.

证 i)⇒ii)。ii)实际上是均衡性的推广，其证明也与定理 9.1.4 类似。跟那里一样，我们假定

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{B_k}=f$$

下面对 s 应用数学归纳法。当 $s=1$ 时，证明与定理 9.1.4 完全相同，唯一的区别是将那里的 Ω 换成更一般的集合 A（相应的性质称为完全均衡）。现假定定理对于 $s-1$ 是对的。

已知 $C_1=\{\omega\mid f(\omega)>0\}$，$A_1,A_2,\cdots,A_n,B_1,B_2,\cdots,B_m$ 作为 C_1 的子集生成的代数（即用 C_1 代替定义中的 Ω）记为 $\mathscr{B}$. 又设

$$K=\{(\lambda_A)_{A\in\mathscr{B}}\mid(\lambda_A)\in R_+^{\mathscr{B}},\sum_{A\in\mathscr{B}}\lambda_A\chi_A=f\}\qquad(9.1.9)$$

$$L=\{(\lambda_A)\in K\mid\sum\lambda_A v(A)=\max u(K)\}\qquad(9.1.10)$$

其中 u 是线性函数：

$$u:R^{\mathscr{B}}\to R;(\lambda_A)\to\sum_{A\in\mathscr{B}}\lambda_A v(A)$$

类似于定理 9.1.4 的证明，容易验证

$$\max_{\lambda\in L}\lambda_{C_1}=\min_{C_1}f$$

所以，如果 $\lambda^0\in L$ 满足 $\lambda^0_{C_1}=\min_{C_1}f=\mu_1$，则由(9.1.10)可得

$$\sum_{k=1}^{n}a_k v(B_k)\leqslant\lambda^0_{C_1}v(C_1)+\sum_{\substack{A\in\mathscr{B}\\A\neq C_1}}\lambda^0_A v(A)$$

但 $\sum_{A\in\mathscr{B},A\neq C_1}\lambda_A^0 x_A$ 的典式是 $\sum_{j=2}^{s}\mu_j\chi_{c_j}$，所以由归纳假设

$$\sum_{\substack{A\in\mathscr{B}\\A\neq C_1}}\lambda_A^0 v(A)\leqslant\sum_{j=2}^{s}\mu_j v(C_j)$$

最后得到

$$\sum_{K=1}^{m}a_k v(B_k)\leqslant\sum_{j=1}^{s}\mu_j v(C_j)$$

ii)⇒iii)。根据推论 9.1.2，有

$$\min_{\mu\in C(v)}\langle f,\mu\rangle$$

$$=\sup\left\{\sum_{i=1}^{m}a_i v(B_i)-v(\Omega)\left\|f-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\chi_{B_i}\right\|:\alpha_i>0,B_i\in\mathscr{A}\right\}$$

记

$$\left\|f-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\chi_{B_i}\right\|=\lambda_0$$

则显然有

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\chi_{B_i}\leqslant\lambda_0\chi_\Omega+\sum_{j=1}^{s}\mu_j v(C_j)$$

因此，根据 ii)有

$$\sum_{i=1}^{m}a_i v(B_i)\leqslant\lambda_0 v(\Omega)+\sum_{j=1}^{s}\mu_j v(C_j)$$

于是

$$\sup\{\cdots\}=\sum_{j=1}^{s}\mu_j v(C_j)$$

iii)⇒iv)。取 $f=\Sigma_{j=1}\chi_{C_j}$. 由 iii)，存在 $\mu_0\in C(v)$，满足

$$\langle f,\mu_0\rangle=\min_{\mu\in C(v)}\langle f,\mu\rangle=\sum_{j=1}^{s}v(C_j)$$

于是

$$\sum_{j=1}^{s}\mu_0(C_j)=\sum_{j=1}^{r}v(C_j)$$

但 $\mu_0(C_j)\geqslant v(C_j)$，$j=1,2,\cdots,s$，所以必有 $\mu_0(C_j)=v(C_j)$。

iv)⇒i)。设 $A_1,A_2\in\mathscr{A}$，由 iv)，存在 $\mu\in C(v)$ 使 $\mu(A_1\cap A_2)=v(A_1\cap A_2)$ 和 $\mu(A_1\cup A_2)=v(A_1\cup A_2)$ 同时成立，于是

$$\begin{aligned} v(A_1)+v(A_2) &\leqslant \mu(A_1)+\mu(A_2) \\ &= \mu(A_1\cup A_2)+\mu(A_1\cap A_2) \\ &= v(A_1\cup A_2)+v(A_1\cap A_2) \end{aligned}$$

定理证毕。

推论 9.1.6 设 $(\Omega,\mathscr{A},v)$ 是一个凸对策，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个子代数。如果 $f\in B(\Omega,\mathscr{B})$，则

$$\min\langle f,C(\Omega,\mathscr{B},v)\rangle=\min\langle f,C(\Omega,\mathscr{A},v)\rangle.$$

证 设 f 是简单函数，即 $f=\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\chi_{B_k}$，其中 $B_k\in\mathscr{B}$. 取充分大的 γ，使 $f_1=f+\gamma\chi_\Omega$ 恒取正值。现设 f_1 的典式为 $\sum_{j=1}^{s}\mu_j\chi_{C_j}$，则由定理 9.1.5，

$$\begin{aligned} &\min\langle f,C(\Omega,\mathscr{B},v)\rangle \\ &=\min\{\langle f_1-\gamma\chi_\Omega,\mu\rangle\mid\mu\in C(\Omega,\mathscr{B},v)\} \\ &=\min\{\langle f_1,\mu\rangle\mid\mu\in C(\Omega,\mathscr{B},v)\}-\gamma v(\Omega) \\ &=\sum_{j=1}^{s}\mu_j v(C_j)-\gamma v(\Omega) \end{aligned}$$

类似地

$$\min\langle f,C(\Omega,\mathscr{A},v)\rangle=\sum_{j=1}^{s}\mu_j v(C_j)-\gamma v(\Omega)$$

因此，结论对于简单函数是对的。

对于一般的 $f\in B(\Omega,\mathscr{B})$，取一列简单函数 $f_n\in B(\Omega,\mathscr{B})$ 使 f_n 一致收敛于 f. 显然，只需证明存在一个子列 $\{f_{n_k}\}$，满足

$$\min\langle f_{n_k},K\rangle\to\min\langle f,K\rangle,\quad k\to\infty \tag{9.1.11}$$

其中 K 为 $C(\Omega,\mathscr{B},v)$ 或 $C(\Omega,\mathscr{A},v)$。

设 $\mu_n,\mu\in K$ 满足

$$\min\langle f_n,K\rangle=\langle f_n,\mu_n\rangle$$

$$\min\langle f,K\rangle=\langle f,\mu\rangle$$

注意到 K 是 $B^*(\Omega,\mathscr{B})$ 或 $B^*(\Omega,\mathscr{A})$ 中有界闭子集，所以是弱*紧集，因此存在 μ_n 的弱*收敛子序列 $\mu_{n_k}\xrightarrow{弱^*}\mu'\in K$. 由此及 f_{n_k} 的一致收敛性得到

$$\begin{aligned}\min\langle f,K\rangle &\leqslant \langle f,\mu'\rangle=\lim_{k\to\infty}\langle f_{n_k},\mu_{n_k}\rangle\\ &\leqslant \lim_{k\to\infty}\langle f_{n_k},\mu\rangle=\langle f,\mu\rangle\\ &=\min\langle f,K\rangle\end{aligned}$$

因此，$\lim\limits_{k\to\infty}\langle f_{n_k},\mu_{n_k}\rangle=\min\langle f,K\rangle$，即(9.1.11)成立，推论得证。

如果 $(\Omega,\mathscr{B},v)$ 是 $(\Omega,\mathscr{A},v)$ 的一个子对策，那么从 $C(\Omega,\mathscr{A},v)$ 中的每个元素 μ 可导出一个属于 $C(\Omega,\mathscr{B},v)$ 的元素 $\mu|_{\mathscr{B}}$. 如用 $K(\mathscr{B})$ 表示所有这种 $\mu|_{\mathscr{B}}$ 的全体，即

$$K(\mathscr{B})=\{\mu|_{\mathscr{B}}:\mu\in C(\Omega,\mathscr{A},v)\}$$

则不难知道，一般情况下 $K(\mathscr{B})$ 只是 $C(\Omega,\mathscr{B},v)$ 的一个子集，并不与之重合。但对于凸对策，有如下非常有用的投影定理。

定理 9.1.7 设 $(\Omega,\mathscr{A},v)$ 是一个均衡对策，则 v 是凸的当且仅当对于 $\mathscr{A}$ 的任一子代数 $\mathscr{B}$，$K(\mathscr{B})=C(\Omega,\mathscr{B},v)$。

证 必要性。假如存在 $\mu\in C(\Omega,\mathscr{B},v)/K(\mathscr{B})$，则由分离定理，存在 $f\in B(\Omega,\mathscr{B})$，使得

$$\langle f,\mu\rangle<\min\langle f,K(\mathscr{B})\rangle$$

但由推论 9.1.6，

$$\begin{aligned}&\min\langle f,K(\mathscr{B})\rangle\\ &=\min\{\langle f,\mu\rangle\,|\,\mu\in C(\Omega,\mathscr{A},v)\}\\ &=\min\{\langle f,\mu\rangle\,|\,\mu\in C(\Omega,\mathscr{B},v)\}\\ &\leqslant\langle f,\mu\rangle\end{aligned}$$

这就得出了矛盾。

充分性。设 $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$. 记 $\mathscr{B}$ 为由 A_1, A_2 生成的子代数. 显然, $\mathscr{B}$ 也是由剖分 $\{A_1 \cap A_2, \Omega-(A_1 \cup A_2), (A_1-A_2) \cup (A_2-A_1)\}$ 生成的子代数。所以 $(\Omega, \mathscr{B}, v)$ 实际上是一个三人对策。设 $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$, 先证

$$v(B_1)+v(B_2) \leqslant v(B_1 \cup B_2)+v(B_1 \cap B_2) \quad (9.1.12)$$

实际上, 如果 $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$ 且 $B_1 \cup B_2=\Omega$, 那么考虑由 $B_1 \cap B_2$ 生成的子代数 $\mathscr{B}'=\{\varnothing, B_1 \cap B_2, \Omega-(B_1 \cap B_2), \Omega\}$. $(\Omega, \mathscr{B}', v)$ 是一个二人对策, 在其核心中存在一个元素 $\tilde{\mu}$ 满足 $\tilde{\mu}(B_1 \cap B_2)=v(B_1 \cap B_2)$。因为 $K(\mathscr{B}')=C(\Omega, \mathscr{B}', v)$, 故存在 $\mu \in C(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 使 $\mu|_{\mathscr{B}'}=\tilde{\mu}$. μ 显然也满足 $\mu(B_1 \cap B_2)=v(B_1 \cap B_2)$。因此,

$$\begin{aligned} v(B_1)+v(B_2) &\leqslant \mu(B_1)+\mu(B_2) \\ &=\mu(B_1 \cup B_2)+\mu(B_1 \cap B_2) \\ &=v(\Omega)+v(B_1 \cap B_2) \end{aligned}$$

即 (9.1.12) 成立。对于 B_1, B_2 的其它情形, (9.1.12) 可类似地加以证明。

因此, $(\Omega, \mathscr{B}, v)$ 是一个凸对策。根据定理 9.1.5 之 iv), 存在 $\tilde{\mu} \in C(\Omega, \mathscr{B}, v)$ 使 $\tilde{\mu}(A_1 \cap A_2)=v(A_1 \cap A_2)$ 和 $\tilde{\mu}(A_1 \cup A_2)=v(A_1 \cup A_2)$ 同时成立。于是

$$\begin{aligned} v(A_1)+v(A_2) &\leqslant \bar{\mu}(A_1)+\bar{\mu}(A_2) \\ &=\bar{\mu}(A_1 \cup A_2)+\bar{\mu}(A_1 \cap A_2) \\ &=v(A_1 \cup A_2)+v(A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

这表明 $(\Omega, \mathscr{A}, v)$ 是凸对策, 充分性得证。

在本节的最后, 我们叙述一个与核心的弱序列紧性有关的结论。设 $K \subset \mathrm{ca}(\Omega, \mathscr{A})$, 称 K 是弱序列紧的, 如果 K 中每个序列都含有一个弱收敛的子序列。根据 $\mathrm{ca}(\Omega, \mathscr{A})$ 中弱序列紧性的判别准则 (见[6], 第 Ⅳ 章第九节), K 是弱序列紧集的充要条件是 K 有界而且测度的可列可加性关于 K 中元素是一致的。这一条件也等

价于 K 有界，而且存在某非负测度 λ，使得极限 $\lim\limits_{\lambda(E)\to 0}\mu(E)=0$ 关于 K 中的 μ 一致地成立。

定理 9.1.8 设 v 是凸对策，则

i) $C(v)$ 是弱序列紧集；

ii) 存在非负测度 λ，使得 $C(v)$ 中的测度关于 λ 一致连续，即 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$ 使得

$$\lambda(S)<\delta\Rightarrow\mu(S)\leqslant\varepsilon,\quad \mu\in C(v)$$

证 ii) 从 i) 及弱序列紧性的等价条件直接推出。为说明 i)，需要验证核心中的测度在 $\varnothing$ 处的连续性是一致的。设 $\mu\in C(v)$，$\{S_n\}$ 是一列渐缩的可测集列，且 $S_n\downarrow\varnothing$，那么，由 v 的连续性

$$\begin{aligned}\mu(S_n)&=\mu(\Omega)-\mu(\Omega-S_n)\\&\leqslant v(\Omega)-v(\Omega-S_n)\to 0\end{aligned}$$

因此，$\{\mu(S_n)\}$ 关于 $\mu\in C(v)$ 一致地收剑于零。

§2 具有可数个局中人的连续凸对策

在无限对策中，局中人数最"少"的情形是只有可数个局中人的对策，本节研究这种对策。我们假定对策是凸的，这也是研究一般无限对策经常所采用的作法。

设局中人集合为 $Z=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 为便于研究，我们让 Z 的任一子集都有资格充当联盟，即所论的对策可表示为 $(Z,\mathscr{P}(Z),v)$，简记为 (Z,v) 或 v. 在这种情况下，支付向量(即 $(Z,\mathscr{P}(Z))$ 上的测度)也可视为空间 l_1 中的非负向量，这里 l_1 是绝对可和的序列之全体：

$$l_1=\left\{(x_1,x_2,\cdots,)；\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|<+\infty\right\}$$

于是，分配集可写为

$$E(v) = \{x \in l_1 : x(Z) = v(Z), x_i \geqslant v(i)\}.$$

式中我们亦将 x 视为$(Z, \mathscr{P}(Z))$上的测度，因而 $x(S)$表示和式 $\sum_{i \in S} x_i$. 与第九章一样，我们仍用 $e(S,x)$表示 $v(S)-x(S)$。

稳定集、谈判集和核在可数个局中人情形下的定义可从有限对策的相应定义中逐字逐句地平移过来。但有关它们的存在性和相互关系的结论对于可数个局中人的对策并不普遍成立。本节将以上节有关核心的结论为工具来研究凸对策的这三个概念。为此，我们先引入一些记号。

Z 的剖分$\{\{1\},\{2\},\cdots,\{n-1\},\{n,n+1,\cdots\}\}$记为 π_n 把 π_n 的各元素看作局中人，就可以得到 n 人对策$(\pi_n, v|_{\pi_n})$，其中 $v|_{\pi_n}$定义为

$$v|_{\pi_n}(S) = v(\bigcup_{i \in S} j), S \subset \pi_n$$

特别地，如将 $x \in l_1$ 看成是一个对策，则 $x_{\pi_n} = x|_{\pi_n}$表示 R^n 中的一个向量，其第 i 个分量为

$$(x_{\pi_n})_i = \begin{cases} x_i, & i < n \\ \sum_{j=n}^{\infty} x_j, & i = n \end{cases}$$

如记 $\mathscr{B}(\pi_n)$为由 π_n 生成的代数，则$(\pi_n, v|_{\pi_n})$就是(Z,v)的子对策$(Z, \mathscr{B}(\pi_n), v)$。

定理 9.2.1 对于凸对策(Z,v)，$C(v)$是唯一的稳定集。

证 任取核心 $C(v)$之外的一个分配 x，我们只需证明存在 $z \in C(v)$使 z 优超 x.

因为 $x \bar{\in} C(v)$，由连续性可知，对于充分大的 n 有 $x_{\pi_n} \bar{\in} C(\pi_n, v|_{\pi_n})$。由于$(\pi_n, v|_{\pi_n})$是 n 人凸对策，根据定理 6.6.1，其核心是唯一的稳定集，于是存在 $\bar{z} \in C(\pi_n, v|_{\pi_n})$，使 $\bar{z}$ 优超 x_{π_n}. 再由投影定理，存在 $z \in C(v)$使 $z_{\pi_n} = \bar{z}$. 显然，在对策(Z,v)中 z 仍优超 x，所以 z 即为所求。

为研究谈判集，需要引入如下两个引理。

引理 9.2.2 设(Z,v)是凸对策，$x\in l_1$. 假定集类

$$\mathscr{P}=\{S\subset Z|e(S,x)\geqslant\alpha\}$$

非空，则按照子集的包含关系 $\mathscr{P}$ 中存在极大元和极小元。

证 根据 Zorn 引理，只需证明 $\mathscr{P}$ 的任一全序子集 $\mathscr{P}_0$ 必有上界和下界，即证明

$$M=\bigcup_{S\in\mathscr{P}}S,\quad N=\bigcap_{S\in\mathscr{P}}S$$

都是 $\mathscr{P}$ 中的元素。首先，M 作为 Z 的子集，其本身是可数的。设 $M=\{i_1,i_2,\cdots,\}$，其中 $i_k\in S_k\in\mathscr{P}_0$. 显然，$M=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}S_k$. 由于 $\mathscr{P}_0$ 是全序子集，故对每个 n 都存在 $S'_n\in\mathscr{P}_0$ 使 $S'_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}S_k$，于是 $S'_n\uparrow M$. 由连续性及 $S'_n\in\mathscr{P}$ 知 $e(M)\geqslant\alpha$. 因此 $M\in\mathscr{P}$.

为证 $N\in\mathscr{P}$，写

$$Z-N=\bigcup_{S\in\mathscr{P}_0}(Z-S)=\bigcup_{S\in\mathscr{P}'_0}S$$

其中 $\mathscr{P}'_0=\{Z-S|S\in\mathscr{P}_0\}$仍为全序集合。作类似的推理知道，存在 $\mathscr{P}'_0$ 中的一个渐增集列$\{S'_n\}$使 $Z-N=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}S'_n$. 于是 $N=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(Z-S'_n)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{S}_n$，其中 $\overline{S}_n=Z-S'_n\in\mathscr{P}_0$. 再由连续性得 $e(N)=\lim\limits_{n\to\infty}e(\overline{S}_n)\geqslant\alpha$，故 $N\in\mathscr{P}$.

引理 9.2.3 设(Z,v)是凸对策，$x\in l_1$. 则 $e(\cdot,x)$可达到上确界，即存在 $P\subset Z$ 使 $e(p,x)=\sup\limits_{S\subset Z}e(S,x)$.

证 显然，$e(\cdot,x)$的上确界是有限的，记之为 α. 把引理 9.2.2 应用到非空集类

$$\mathscr{P}_n=\left\{S\subset Z|e(S,x)\geqslant\alpha-\frac{1}{n}\right\}$$

可得 $\mathscr{P}_n$ 的一个极小元 $P_n\subset Z$. 根据凸性不等式，我们有

$$e(\bigcup_{k=1}^{n}P_k)=e(P_1\cup\bigcup_{k=2}^{n}P_k)$$

$$\geqslant e(P_1) + e(\bigcup_{k=2}^{n} P_k) - e(P_1 \cap (\bigcup_{k=2}^{n} P_k))$$

$$\begin{cases} = e(\bigcup_{k=2}^{n} P_k), & P_1 \subset \bigcup_{k=2}^{n} P_{k_j} \\ > a - 1 + e(\bigcup_{k=2}^{n} P_k) - (a-1), & \text{其它} \end{cases}$$

$$\geqslant e(\bigcup_{k=2}^{n} P_k)$$

连续施行上面的推理 $n-1$ 次，得

$$e(\bigcup_{k=1}^{n} P_k) \geqslant e(\bigcup_{k=2}^{n} P_k) \geqslant \cdots \geqslant e(P_n) \geqslant a - \frac{1}{n}$$

记 $P = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$，由连续性

$$e(P) = \lim_{n \to \infty} e(\bigcup_{k=1}^{n} P_k) \geqslant \lim_{n \to \infty} \left(a - \frac{1}{n} \right) = a$$

因此，P 即为所求。

定理 9.2.4 凸对策的谈判集与核心重合。

该定理的证明必须用刚刚建立的两个引理，细节与定理 7.4.3 大致相同，略去。

下面转入考虑凸对策的核。类似于有限个局中人的情形，$\forall\ i, j \in Z, i \neq j$，记

$$\mathscr{T}_{ij} = \{S \subset Z \mid i \in S, j \overline{\in} S\}$$
$$s_{ij}(x) = \sup_{S \in \mathscr{T}_{ij}} e(S, x)$$

于是核 $K(v)$ 就是

$K(v) = \{x \in E(v) \mid (s_{ij}(x) - s_{ji}(x))(x_j - v(j)) \leqslant 0, i, j \in Z\}$

在第七章我们已经看到，有限对策的核总是非空的。对于具有可数个局中人的无限对策，情况就没有这么简单。例如，考虑对策 (Z, v)：

$$v(S)=\begin{cases}1, & \text{当 } S \text{ 是无限集时;}\\ 1-\dfrac{1}{|S|}, & \text{当 } S \text{ 是有限集时.}\end{cases}$$

假如存在 $x\in K(v)$，则由 v 的对称性不难推知 $x_i=x_j, \forall\, i,j\in Z$（参考定理 7.4.3）。由此及 $x(Z)=v(Z)=1$，我们有 $x=0$，从而导出 $x(Z)=0$ 的矛盾。所以 $K(v)$ 是空集。下面的定理将表明，如果对特征函数加以凸的限制，则核的非空性就可得到保证。

引理 9.2.5 设 (Z,v) 是凸对策，$x\in l_1$. 对于 $i,j\in Z, i\neq j$，记

$$s_{ij}^{(n)}(x)=\max_{S\in\mathscr{T}_{ij}\cap\mathscr{P}(\pi_n)} e(S,x),\, i,j\leqslant n$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}s_{ij}^{(n)}(x)=s_{ij}(x)$，而且在 $C(v)$ 上收敛是一致的。

证 仅就后一结论进行证明，前者的证明完全类似。由定义，显然有

$$s_{ij}^{(n)}(x)\leqslant s_{ij}(x),\quad i,j\leqslant n \tag{9.2.1}$$

设 ε 是任意的正数，取 $S\in\mathscr{T}_{ij}$ 使

$$s_{ij}(x)<e(S,x)+\frac{\varepsilon}{2} \tag{9.2.2}$$

根据定理 9.1.8，存在 $\lambda\in l_1, \lambda\geqslant 0$，及 $\delta>0$ 使

$$\lambda(S)<\delta\Rightarrow x(S)<\frac{\varepsilon}{4},\quad \forall\, x\in C(v)$$

记 $Z_n=\{n,n+1,\cdots\}$。取 $N>j$ 使 $\sum\limits_{i=N}^{\infty}\lambda_i<\delta$，则由上式，当 $n>N$ 时

$$S\subset Z_n\Rightarrow x(S)<\frac{\varepsilon}{4},\quad \forall\, x\in C(v) \tag{9.2.3}$$

再由定理 9.1.5 之 iv)，存在 $x_S^{(n)}\in C(v)$，满足

$$x_S^{(n)}(S)=v(S),\quad x_S^{(n)}(S\cup Z_n)=v(S\cup Z_n) \tag{9.2.4}$$

因此，对于 $x\in C(v)$，由 (9.2.3) 和 (9.2.4)，当 $n>N$ 时

$$e(S,x)=v(S)-x(S)=(x_S^{(n)}-x)(S)$$

$$= (x_S^{(n)} - x)(S \cup Z_n) - (x_S^{(n)} - x)(Z_n - S)$$

$$\leqslant e(S \cup Z_n, x) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leqslant s_{ij}^{(n)}(x) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (9.2.5)$$

最后一个不等式成立是因为当 $n>N>j$ 时，$S \cup Z_n \in \mathscr{T}_{ij} \cap \mathscr{B}(\pi_n)$. 结合(9.2.1)和(9.2.5)，得，

$$s_{ij}(x) \leqslant s_{ij}^{(n)}(x) + \varepsilon, \quad n > N, x \in C(v)$$

这与(9.2.1)一起表明 $s_{ij}^{(n)}(x)$在 $C(v)$上一致收敛到 $s_{ij}(x)$.

推论 9.2.6 $s_{ij}(x)$在 $C(v)$上连续(关于 l_1 的弱拓扑)。

这是因为由上面的引理，$s_{ij}^{(n)}(x)$在 $C(v)$上一致收敛到 $s_{ij}(x)$，而每一个 $s_{ij}^{(n)}(x)$显然是连续的。

定理 9.2.7 凸对策的核一定非空。

证 对于每一 n，$(\pi_n, v|_{\pi_n})$是 n 人凸对策。根据定理 7.4.4 和定理 7.5.3，存在 $x_{R^n} \in C(\pi_n, v|_{\pi_n})$使

$$\max_{S \in \mathscr{T}_{ij} \cap \mathscr{B}(\pi_n)} e(S, x_{R^n}) = \max_{S \in \mathscr{T}_{ij} \cap \mathscr{B}(\pi_n)} e(S, x_{R^n}), \quad i, j \leqslant n, \quad i \neq j$$

由投影定理，存在 $x^n \in C(v)$使 $(x^n)_{\pi^n} = x_{R^n}$，于是，

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(n)}(x^n) &= \max_{S \in \mathscr{T}_{ij} \cap \mathscr{B}(\pi_n)} e(S, x^n) \\ &= \max_{S \in \mathscr{T}_{ij} \cap \mathscr{B}(\pi_n)} e(S, x_{R^n}) \\ &= \max_{S \in \mathscr{T}_{ji} \cap \mathscr{B}(\pi_n)} e(S, x_{R^n}) \\ &= \max_{S \in \mathscr{T}_{ij} \cap \mathscr{B}(\pi_n)} e(S, x^n) = s_{ji}^{(n)}(x^n) \end{aligned} \qquad (9.2.6)$$

由于 $C(v)$是 l_1 中的弱序列紧集(定理 9.1.8)，存在$\{x^n\}$的一个弱收敛子序列$\{x^{n_k}\}$. 设 $x = \lim_{k \to \infty} x^{n_k}$(弱极限)。由于 $s_{ij}^{(n_k)}(x)$在 $C(v)$上一致收敛到连续函数 $s_{ij}(x)$，故

$$s_{ij}^{(n_k)}(x) \to s_{ij}(x), \quad s_{ji}^{(n_k)}(x) \to s_{ji}(x)$$

所以由(9.2.6)，

$$s_{ij}(x) = s_{ji}(x),\quad i,j \in Z,\quad i \neq j$$

因此，$x \in K(v)$.

引理 9.2.8 $s_{ij}(x)$定义中的上确界可达。

证明与引理 9.2.2、9.2.3 类似，留给读者作为练习。

利用引理 9.2.8，类似于第七章相应结论的证明，我们有

定理 9.2.9 设(Z,v)是凸对策，则

i) $K(v)$是谈判集的子集；

ii) $K(v)=\{x \in E(v) \mid s_{ij}(x)=s_{ji}(x), i \neq j\}$；

iii) $K(v) \subset C(v)$

证明留作练习。

至此，我们已对凸对策的稳定集、谈判集和核有了比较全面的了解。概括地说，对于这种对策，核心是唯一的稳定集；谈判集与核心重合；核是核心的非空子集。因此，从这方面来看，具有可数个局中人的凸对策与有限凸对策有着基本类似的性质。

§3 缺原子对策的值（Ⅰ）：公理方法

在前面两节，我们尚未触及无限对策的值理论——即如何将 Shapley 值推广到无限对策上来。这是一个具有丰硕成果的领域，是近年来对策论的一个非常活跃的分支。在本章的后两节，我们将对这一理论的精华部分作简要的介绍。

假定所论可测空间(Ω,A)是$(I,\mathscr{B})$，其中$I=[0,1]$，$\mathscr{B}$是$[0,1]$上的 Borel 集类。还假定特征函数v(亦称对策)满足下面定义的缺原子性。

定义 9.3.1 对于对策v，任一载体[①]的补集称为无效集(null

① 载体的定义与第八章相同。

set)。一个可测的非无效集 S 称为原子，如果从

$$S = S_1 \cup S_2, \quad S_1 \cap S_2 = \varnothing, \quad S_1, S_2 \in \mathscr{B}$$

可推得 S_1 或 S_2 必为无效集。

没有任何原子的对策称为缺原子对策(nonatomic game)。

本节和下节只研究以$(I,\mathscr{B})$为可测空间的缺原子对策。但我们不假定特征函数满足非负性，也不假定它满足 σ-连续性，虽然所论及的大多数对策满足这一性质。

如果 μ 是广义测度，那么 μ 作为一种特殊的对策，其缺原子性等价于

$\mu(S) \neq 0 \Rightarrow$ 存在 $T \subset S$ 使 $\mu(S)$ 与 $\mu(T)$ 不相同且都不为 0

对于所论的可测空间$(I,\mathscr{B})$，读者容易证明 μ 缺原子的充要条件是每个单点集的测度为零。

在一些政治、经济问题中，我们经常要遇到局中人很多、而每个局中人对大局的影响又微不足道，可以忽略不计的情况。这时用缺原子对策对其加以描述就比较合适。

设

$$\sum = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$$

是 $\mathscr{B}$ 中的一列集合，满足

$$\varnothing = S_0 \subset S_1 \subseteq \cdots \subset S_m = I$$

并称之为集链。对于这样一个集链和对策 v，令

$$\| v \|_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} | v(S_i) - v(S_{i-1}) |$$

再令

$$\| v \| = \sup \| v \|_{\Sigma}$$

其中上确界对一切可能的集链来取。称 $\| v \|$ 为 v 的全变差。记 BV 为所有具有有界变差(即 $\| v \|$ 有限)的对策之全体。

定理 9.3.1 BV 在全变差范数 $\| \cdot \|$ 下构成 Banach 空间。

证 必须证明 $\| \cdot \|$ 是 BV 上的范数，且 BV 按照这个范数

是完备的赋范线性空间。实际上，对于任一对策 v 及实数 α，有

$$\|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\|$$

因为 $\|\alpha v\|_\Sigma = |\alpha|\,\|v\|_\Sigma$ 对一切集链 Σ 都成立。同样，对于对策 v 和 w，有

$$\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$$

这同样是由于 $\|v+w\|_\Sigma \leqslant \|v\|_\Sigma + \|w\|_\Sigma$ 对一切集链 Σ 都成立的缘故。最后容易看出，除非 v 恒为零，否则总有 $\|v\| > 0$.

因此，全变差的确是 BV 上的范数。下一步必须证明完备性。假定 $v_1, v_2, \cdots, v_n, \cdots$ 是在全变差范数下的 Cauchy 序列。那么容易看出，对于每个 $S \in \mathscr{B}$，序列 $v_1(S), v_2(S), \cdots, v_n(S), \cdots$ 是 Cauchy 序列，从而有极限 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(S)$。现必须证明 $v \in \mathrm{BV}$. 实际上，取充分大的 N 使 $\|v_n - v_N\| \leqslant 1$ 对一切 $n \geqslant N$ 都成立，则对任一集链 Σ，

$$\|v_n\|_\Sigma \leqslant \|v_n - v_N\|_\Sigma + \|v_N\|_\Sigma \leqslant 1 + \|v_N\|_\Sigma$$

两端取 $n \to \infty$ 时的极限，

$$\|v\|_\Sigma \leqslant 1 + \|v_N\|_\Sigma$$

所以

$$\|v\| \leqslant 1 + \|v_N\|$$

从而 $v \in \mathrm{BV}$. 最后容易验证 $\|v_n - v\| \to 0$，因而 v 是序列 $\{v_n\}$ 的极限。这就证明了 BV 的完备性。

例 1　考虑形如

$$v(S) = f(\mu(S)) \tag{9.3.1}$$

的对策，其中 μ 是缺原子测度，f 是定义在 $[0, \mu(I)]$ 上的有界变差函数，满足 $f(0) = 0$. 容易看出 $v \in \mathrm{BV}$.

例 2　设 v 是单调对策，即 v 满足

$$S \subset T \Rightarrow v(S) \leqslant v(T)$$

则对一切集链 Σ，

$$\|v\|_\Sigma = \Sigma[v(S_i) - v(S_{i-1})] = v(I)$$

可见 $v \in BV$. 又设 u 是两个单调对策的差，即 $u = v - w$，其中 v, w

均为单调对策，则

$$\|u\| \leqslant \|v\| + \|w\| = v(I) + w(I)$$

因此，仍有 $u \in \mathrm{BV}$. 其实，我们还有如下的定理：

定理 9.3.2 每个具有有界变差的对策 v 都可以表示为两个单调对策 u 与 w 的差，而且

$$\|v\| = \min[u(I) + w(I)] \tag{9.3.2}$$

其中 min 对一切满足 $v=u-w$ 的单调对策 u 和 w 来取。

证 为了将对策 v 表示为两个单调对策的差，任取 $S \in \mathscr{B}$. 设

$$\Lambda = \{S_0, S_1, \cdots, S_n\}$$

是满足

$$\varnothing = S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_n = S$$

的集列。定义

$$u_\Lambda(S) = \sum_{i=1}^{n} \max\{v(S_i) - v(S_{i-1}), 0\} \tag{9.3.3}$$

再令

$$u(S) = \sup_{\Lambda} u_\Lambda(S) \tag{9.3.4}$$

其中上确界对所有这样的集列 Λ 来取。同样，定义

$$w_\Lambda(S) = -\sum_{i=1}^{n} \min\{v(S_i) - v(S_{i-1}), 0\} \tag{9.3.5}$$

$$w(S) = \sup_{\Lambda} w_\Lambda(S) \tag{9.3.6}$$

不难看出，对于任一 Λ 有

$$u_\Lambda(S) = v(S) + w_\Lambda(S) \tag{9.3.7}$$

因此

$$u(S) = v(S) + w(S)$$

或

$$v(S) = u(S) - w(S) \tag{9.3.8}$$

显然，上面定义的对策 u, w 都是单调的。所以，我们已把 v 表示为两个单调对策的差。对于 v 的任一这种表示 $v=u-w$，显然

$$\|v\| \leqslant \|u\| + \|w\| = u(I) + w(I)$$

而对于由(9.3.4)和(9.3.6)定义的 u 和 w，以及集链 Σ

$$\begin{aligned}\|v\|_{\Sigma} &= u_{\Sigma}(I) + w_{\Sigma}(I) \\ &= v(I) + 2w_{\Sigma}(I)\end{aligned}$$

所以

$$\|v\| = v(I) + 2w(I) = u(I) + w(I)$$

这就证明了(9.3.2)。

空间 BV 有一些重要的子空间。用 FA 表示 BV 中有限可加的有界集函数①之全体所构成的子空间；NA 表示所有缺原子的测度之全体。显然，NA⊂FA⊂BV，而且 NA，FA 都是 BV 的闭线性子空间。

设 Q 是 BV 的一个子空间。Q 中所有单调对策的全体记为 Q^+. 按照这种记号，NA^+就是所有非负缺原子测度的全体所构成的锥；FA^+是所有有限可加的非负有限集函数的全体。用 pNA 表示由 NA^+测度的所有幂次生成的闭线性子空间。这是缺原子对策理论中最重要的一个空间。另一个重要的子空间是 bv′NA，它是所有形如 $f(\mu)$的对策生成的闭线性子空间，其中 $\mu \in NA^+$满足 $\mu(I)=1$，f 是定义在[0,1]上、在 0 和 1 处都连续的有界变差函数。显然，pNA⊂bv′NA.

设 $v \in BV$，θ 是$(I,\mathscr{B})$上的一个自同构(即从 I 到 I 的一个一一映射，满足：θ 和 θ^{-1}都可测). 定义 BV 上的线性映射 θ_* 如下：

$$(\theta_* v)(S) = v(\theta S)$$

对于 BV 的子空间 Q，如果 $\theta_* Q = Q$ 对一切自同构 θ 都成立，则称 Q 是对称的。不难验证，上面提到的 NA、FA、pNA 和 bv′NA 都是 BV 的对称子空间(BV 本身当然也是)。

定义 9.3.1 设 Q 是 BV 的一个对称子空间，Q 上的一个值

① 有些作者称之为有限可加测度。

是指从 Q 到 FA 的一个线性映射 φ，满足

A_1 （有效性）$(\varphi v)(I)=v(I)$，$\forall\ v\in Q$；

A_2 （对称性）$\varphi\theta_*=\theta_*\varphi$；

A_3 （非负性）$\varphi Q^+\subset FA^+$.

我们称 φv 为对策 v 的值，又称$(\varphi v)(S)$为联盟 S 的值。

类似于有限对策的情形，在值的定义中，有效性公理相当于假定大联盟 I 形成；对称性公理说的是值并不依赖于对局中人的命名方式。非负性公理虽然是这里新添的，但看来仍有立足之地。事实上，如果 v 是单调的，则在任一集合中加入联盟 S 都只会使 v 增值或保持不变，因而要求联盟 S 的值是一个非负数看来是合理的。应当指出，非负性公理与下面就要论及的连续性有紧密的联系（见定理 9.3.4 和 9.3.5）。

由于值是线性算子，所以 φ 是连续算子的充要条件是 φ 有界，即由

$$\|\varphi\| = \sup_{v\in Q}\frac{\|\varphi v\|}{\|v\|}$$

定义的范数 $\|\varphi\|$ 有限。

针对 Banach 空间 BV，我们有

定理 9.3.3 设 φ 是从 BV 到 FA 的线性算子，满足公理 $A1$ 和 $A3$，则 φ 连续且 $\|\varphi\|=1$.

证 对于单调对策 u，由 $A3$，φu 也单调。于是

$$\|\varphi u\| = \varphi u(I),\ \|u\| = u(I)$$

再由 $A1$，$\varphi u(I)=u(I)$，所以

$$\|\varphi u\| = \|u\| \tag{9.3.9}$$

因此，$\|\varphi\|\geqslant 1$.

再任取 $v\in BV$，根据定理 9.3.2，存在单调对策 u 和 w，使得

$$v = u - w,\quad \|v\| = u(I) + w(I)$$

由此及已证的(11.3.9)，得

$$\|\varphi v\| = \|\varphi u - \varphi w\|$$
$$\leqslant \|\varphi u\| + \|\varphi w\| = u(I) + w(I) = \|v\|$$

所以，$\|\varphi\| \leqslant 1$.

综合上述两方面，得 $\|\varphi\| = 1$.

上述定理表明，如果 BV 上有值存在，则它必连续，且范数为1。但 BV 上是否存在值呢？答案是否定的。事实上，可以考虑如下的缺原子对策

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \lambda(S) < 1 \\ 1, & \lambda(S) = 1 \end{cases}$$

其中 λ 是 Lebesgue 测度。假定在 BV 上存在一个值 φ，下面设法由此推出矛盾。

设 $S, T \in \mathscr{B}$，满足

$$\lambda(S) = \lambda(T) > 0$$

则存在$(I, \mathscr{B})$上保测的自同构 θ，使

$$\theta(S) = T$$

容易看出，$\theta_* v = v$；因此，由 $A2$

$$(\varphi v)(S) = (\varphi v)(T)$$

因为此式对任何两个具有相同 Lebesgue 测度的集合都成立，故

$$(\varphi v)(S) = f(\lambda(S))$$

其中 f 是单调函数，满足 $f(1)=1$。又由于 φv 是可加集函数，所以 f 满足

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

因此，$f(\lambda)$即为 λ 本身，从而

$$(\varphi v)(S) = \lambda(S)$$

即 φv 与 Lebesgue 测度重合。

但是，如作测度 μ：

$$\mu(S) = \int_S 2x d\lambda, \qquad S \in \mathscr{B}$$

则容易看出，$\mu(S)=0$ 当且仅当 $\lambda(S)=0$. 因此，v 也可表示为

$$v(S)=\begin{cases}0, & \mu(S)<1\\ 1, & \mu(S)=1\end{cases}$$

类似地，可以证明 φv 必与 μ 重合。但 $\mu\neq\lambda$，这就导出了所要的矛盾。

从上例看到，在 BV 上没有值存在很可能是由于公理 $A2$ 太强的缘故。基于这方面的考虑，Ruckle[12] 曾把公理 $A2$ 修改成 $A2'$，仅要求 $\theta.\varphi=\varphi\theta$. 对一部分特殊的自同构 θ 成立，并证得在 BV 上存在这种较弱意义下的“值”。

另一方面，更多更重要的研究则是致力于寻找 BV 的一些子空间，使得其上有值存在。但是，子空间上值（如果有的话）的连续性并不能从定理 9.3.3 获得保证。为弥补这一缺陷，我们引入

定义 9.3.2 设 Q 是 BV 的子空间，如果对每个 $v\in Q$

$$\|v\|=\inf\{u(I)+w(I)\,|\,u,w\in Q^{+},\text{且 } v=u-w\}$$

则称 Q 为内在空间(internal space)。

显然，BV 本身是内在空间。

定理 9.3.4 设 Q 是内在空间。如果 φ 是从 Q 到 FA 的非负线性算子，则 φ 连续。

注：就连续性而言，该定理的结论显然比定理 9.3.3 更强，它表明，把定理 9.3.3 中的公理 $A1$ 去掉不会影响结论中 φ 的连续性。

证 如果要求 φ 也满足公理 $A1$，那么证明与定理 9.3.3 基本相同。在现在这种较弱的条件下，先证明存在正数 K 使

$$\frac{(\varphi v)(I)}{v(I)}\leqslant K,\quad \forall\, v\in Q^{+} \tag{9.3.10}$$

事实上，如果不存在这样的 K，则对于每个 n，存在 $v_n\in Q^{+}$，满足

$$\frac{(\varphi v_n)(I)}{v_n(I)}>n \tag{9.3.11}$$

另外，可以假定所选 v_n 满足 $v_n(I)=1/n^2$. 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n \in Q^+$；但由 φ 的非负性，对一切 k 都有

$$(\varphi v)(I) \geqslant \varphi\left(\sum_{n=1}^{k} v_n\right)(I) > \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$$

因此，$(\varphi v)(I)$ 比任何数都大，这是一个矛盾，(9.3.10)得证。

最后，对于 $v \in Q$，如果 $v=u-w, u, w \in Q^+$，则由(9.3.10)及 φ 的非负性

$$\begin{aligned} \|\varphi v\| &= \|\varphi u - \varphi w\| \leqslant \|\varphi u\| + \|\varphi w\| \\ &= (\varphi u)(I) + (\varphi w)(I) \leqslant K(u(I) + w(I)) \end{aligned}$$

两端取下确界即得

$$\|\varphi v\| \leqslant K\|v\|$$

定理 9.3.5 设 Q 是 BV 的一个线性子空间，φ 是从 Q 到 FA 的线性算子，满足条件 $A1$ 且 $\|\varphi\| \leqslant 1$，则 φ 是非负的。

证 设 v 是单调的。假定结论不对，即存在联盟 S 满足 $(\varphi v)(S)<0$。那么，由于 v 的单调性、$\|\varphi\| \leqslant 1$ 以及条件 $A1$，有

$$\begin{aligned} v(I) = \|v\| &\geqslant \|\varphi v\| \\ &\geqslant |(\varphi v)(S)| + |(\varphi v)(I) - (\varphi v)(S)| \\ &> |v(I) - (\varphi v)(S)| \\ &= v(I) - (\varphi v)(S) > v(I) \end{aligned}$$

这一矛盾就证明了所要的结论。

下一步来看 BV 的几个子空间及其上值的存在性和唯一性。记 P 为由缺原子的非负测度的诸次幂生成的线性子空间。显然，P 的闭包就是 pNA，即 $\overline{P}=$pNA，空间 P 含有什么样的元素呢？下面的定理将有助于我们看清这一点。

定理 9.3.6 设 f 是 n 元多项式，满足 $f(0)=0$，又设 $\mu=(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ 是一个缺原子的向量测度，则 $f(\mu) \in P$.

证 先证明

$$
\begin{aligned}
k!\,x_1\cdots x_k = & (x_1+\cdots+x_k)^k \\
& - \sum_{1\leqslant i\leqslant k}(x_1+\cdots+x_k-x_i)^k \\
& + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k}(x_1+\cdots+x_k-(x_i+x_j))^k \\
& - \cdots
\end{aligned}
\tag{9.3.12}
$$

实际上，上式右边当 $x_1=0$ 时取值为 0，因而它被 x_1 整除。同样，它亦被 $x_2,\cdots,x_k$ 整除。又由于右边是一个 k 次多项式，故必为 $x_1\cdots x_k$ 的倍数。但形如 $x_1\cdots x_k$ 的项只在右边第一项出现，且系数为 $k!$，所以(9.3.12)一定成立。

由(9.3.12)马上知道，每个 n 元多项式都可以表示为若干个变量之和的幂的线性组合。因此，如果 μ 的诸分量都是 NA^+ 测度，则 $f(\mu)\in P$. 在一般情况下，注意到每个 NA 测度都可表示为两个 NA^+ 测度的差，因而 $f(\mu)$ 可表示为一些 NA^+ 测度的一个多项式，所以也属于 P，定理得证。

现在来叙述并证明本节的一个重要结论。

定理 9.3.7 在空间 P 上存在唯一的值 φ，而且该值是连续的，范数为 1。

证 先证明唯一性。设

$$v=\mu^r$$

其中 $\mu\in NA^+$ 满足 $\mu(I)=1$。如果 $S,T\in\mathscr{B}$，满足

$$\mu(S)=\mu(T)$$

那么存在 $(I,\mathscr{B})$ 上的自同构 θ，它将 S 映成 T 且使 μ 保持不变(从而 $\theta_* v=v$)。于是由 $A2$，

$$(\varphi v)(S)=(\varphi v)(T)$$

由此可见，φv 只依赖于测度 μ. 由于 φv 是可加的集函数，它只能写成

$$\varphi v=c\mu,$$

其中 c 是常数。但由 $A1$

$$(\varphi v)(I) = \mu^n(I) = 1 = \mu(I)$$

所以 $c=1$. 因此，对于任一满足 $\mu(I)=1$ 的 NA$^+$ 测度 μ 及自然数 n

$$\varphi\mu^n = \mu$$

再任取 $v\in P$. v 可写成

$$v = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i f_i(\mu_i) \qquad (9.3.13)$$

其中 α_i 是实数，$f_i(x)$是 x 的正整数次幂，μ_i 是满足 $\mu_i(I)=1$ 的 NA^+测度。由 $A3$，有

$$\varphi v = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mu_i$$

至此可以看到，在 P 上至多存在一个值。

其次证明值的存在性。任取 $v\in P$，仍设 v 可表示为(9.3.13)的形式。记 $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_k)$。再设 $S\in\mathscr{B}$，$0<t<1$；令 $S'=I-S$. 根据 Lyapunov 定理(见附录)，$\mu(\mathscr{B}\cap S)$和 $\mu(\mathscr{B}\cap S')$都是凸集。于是存在联盟 $tS\subset S$ 和 $tS'\subset S$，满足

$$\mu(tS) = t\mu(S), \mu(tS') = t\mu(S')$$

令 $tI=tS\cup tS'$，则

$$\mu(tI) = t\mu(I) = (t,\cdots,t) \qquad (9.3.14)$$

另一方面，由 $\mu(S-tS)=(1-t)\mu(S)$出发用 Lyapunov 定理可知，对于 $0<\tau<1-t$，存在联盟 $\tau S\subset S-tS$，满足

$$\mu(\tau S) = \tau\mu(S) \qquad (9.3.15)$$

显然，$tI\cap\tau S=\varnothing$，于是

$$\mu(tI\cup\tau S) = t\mu(I) + \tau\mu(S) \qquad (9.3.16)$$

由(9.3.14)和(9.3.16)容易验证

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{v(tI\cup\tau S) - v(tI)}{\tau} = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mu_i(S)f_i'(t)$$

两边积分，并注意 $\int_0^1 f_i(t)\mathrm{d}t = 1$，得到

$$\int_0^1 \lim_{\tau\to 0} \frac{v(tI \cup \tau S) - v(tI)}{\tau}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu_i(S) \quad (9.3.17)$$

现在 P 上定义 φ 如下：

$$\varphi v = \sum \alpha_i \mu_i \quad (9.3.18)$$

为证明这作为定义的可行性，必须说明当 v 有两种不同的形如(9.3.13)的表达式时，由(9.3.18)得出的 φv 一定相同。这相当于证明当(9.3.13)的右边恒为零时，(9.3.18)的右边也恒为零；但这可从(9.3.17)马上推得。因此，用(9.3.18)来定义 φ 是可行的。

容易验证，φ 是线性的，且满足条件 $A1$ 和 $A2$. φ 也满足条件 $A3$，即当 v 是单调对策时，φv 必非负。这同样可从(9.3.17)直接推得。因此，由(9.3.18)定义的 ψ 的确是 P 上的值。

下面再证明由(9.3.18)定义的 φ 是连续的且范数为 1。为此将 φ 的表达式改写一下。对于由(9.3.13)给出的 $v\in P$，作 k 元函数 f：

$$f(x_1,\cdots,x_k) = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i(x_i) \quad (9.3.19)$$

则 $v=f(\mu)$，而且容易验证由(9.3.18)给出的 φv 可写为

$$\varphi v = \int_0^1 f_{\mu(S)}(t\mu(I))\mathrm{d}t$$

其中 $f_{\mu(S)}$ 是 f 沿 $\mu(S)$ 的方向导数。我们必须证明 $\|\varphi v\| \leqslant \|v\|$.

记 $\lambda\in\varphi v$. 显然(由(9.3.18))，$\lambda\in NA$. 设 $I=S^+\cup S^-$ 是 I 关于 λ 的 Habn 分解；即 λ 在 S^+ 及其子集上取值非负，在 S^- 及其子集上取值非正，且 $S^+\cap S^-=\varnothing$. 这时

$$\|\lambda\| = |\lambda(S^+)| + |\lambda(S^-)|$$

设 m 是任意自然数。根据 Lyapunov 定理，可将 S^+ 剖分成不相交的联盟 $S_1^+,\cdots,S_m^+$ 使得 $\mu(S_j^+)=\mu(S^+)/m$ 对所有的 j 都成立。同样，可把 S^- 剖分成不相交的联盟 $S_1^-,\cdots,S_m^-$ 使得 $\mu(S_j^-)=$

$\mu(S^-)/m$ 对一切 j 都成立。现作集链

$$S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_{2m}$$

其中 $S_0=\varnothing$，且

$$S_{2j} = (S_1^+ \cup S_1^-) \cup \cdots \cup (S_j^+ \cup S_j^-)$$
$$S_{2j+1} = S_{2j} \cup S_{j+1}^+$$

令 $y=\mu(S^+)$，$b=\mu(I)$，则 $\mu(S^-)=b-y$. 于是

$$\mu(S_{2j}) = \frac{jb}{m}$$

$$\mu(S_{2j+1}) = \frac{jb+y}{m}$$

因此，

$$\begin{aligned}\|v\| &\geqslant \sum_{i=1}^{2m} |f(\mu(S_i)) - f(\mu(S_{i-1}))| \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \left| f\left(\frac{jb+y}{m}\right) - f\left(\frac{jb}{m}\right) \right| \\ &\quad + \sum_{j=0}^{m-1} \left| f\left(\frac{(j+1)b}{m}\right) - f\left(\frac{jb+y}{m}\right) \right| \end{aligned} \tag{9.3.20}$$

根据 f 的表达式，有

$$f\left(\frac{jb+y}{m}\right) - f\left(\frac{jb}{m}\right) = \frac{1}{m} f_y\left(\frac{jb}{m}\right) + o\left(\frac{1}{m}\right),$$

和

$$f\left(\frac{(j+1)b}{m}\right) - f\left(\frac{jb+y}{m}\right) = \frac{1}{m} f_{b-y}\left(\frac{jb}{m}\right) + o\left(\frac{1}{m}\right)$$

其中 $o\left(\frac{1}{m}\right)$ 关于 j 是一致的。将上述两式代入(9.3.20)，得

$$\begin{aligned}\|v\| &\geqslant \sum_{j=0}^{m-1} \left| \frac{1}{m} f_y\left(\frac{jb}{m}\right) \right| + \sum_{j=0}^{m-1} \left| \frac{1}{m} f_{b-y}\left(\frac{jb}{m}\right) \right| + o(1) \\ &\geqslant \left| \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m} f_y\left(\frac{jb}{m}\right) \right| + \left| \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{m} f_{b-y}\left(\frac{jb}{m}\right) \right| + o(1)\end{aligned}$$

令 $m\to\infty$，并注意上式右边的两个和分别趋于两个不同的 Rie-

mann 积分，得到

$$\| v \| \geqslant \left| \int_0^1 f_y(tb) dt \right| + \left| \int_0^1 f_{b-y}(tb) \mathrm{d}t \right|$$

$$= |\lambda(S^+)| + |\lambda(S^-)| = \| \lambda \|$$

至此终于证得 $\| \varphi v \| \leqslant \| v \|$. 由于这对任一 $v \in P$ 都成立，故 φ 是连续的，且 $\| \varphi \| \leqslant 1$. 最后，注意到当 $v \in NA$ 时 $\varphi v = v$，因此 $\| \varphi \| = 1$。定理证毕。

P 上唯一值 φ 的连续性使我们可以把 φ 从 P 延拓到 P 的闭包 $\overline{P}$=pNA 上来，并保持范数不变。这样就得到 pNA 上的一个值 φ，从而证明了 pNA 上值的存在性。pNA 有多大呢？根据缺原子对策理论标准著作[2]的一个重要结果，pNA 含有所有形如

$$v = f(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$$

的对策，其中 $\mu_i \in NA$，f 是定义在 $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_k)$ 的值域上、连续可微并满足 $f(0)=0$ 的实函数。类似于定理 9.3.7 连续性的证明，不难看出上述对策的值可表示为

$$(\varphi v)(S) = \int_0^1 f_{\mu(S)}(t\mu(I)) \mathrm{d}t$$

pNA 是一个内在空间（证明比较困难，见[2]或 Reichert 和 Tauman[11]的最新证明）。由定理 9.3.4，pNA 的任何值都一定连续。但我们已经看到，在 P 上只有唯一的值，而 pNA 又是 P 的闭包，所以由连续性知道，在 pNA 上至多只有一个值存在。

综合上述两方面的说明，我们得到

定理 9.3.8 在 pNA 上存在唯一的值 φ，且 $\| \varphi \| = 1$.

pNA 上的值还可延拓到更大的空间 bv′NA 成为 bv′NA 上唯一的值。这一结论的证明比较复杂，可在[2]第八节找到。有兴趣的读者还可参阅 Tauman 的[15]，那里将 bv′NA 上的值作了进一步的延拓，并提供了一种稍为简单的方法来说明 bv′NA 上值的存在性和唯一性。

§4 缺原子对策的值(Ⅱ):渐近方法

本节采用另一种方法来研究缺原子对策的值的问题,这就是Kannai[7]的渐近方法。这种方法的基本思想是:把局中人集合I剖分成有限个"很小"的集合,然后将每一个小集合看成是一个局中人,这样就从原来的缺原子对策得到一个有限的辅助对策。每一个这样的辅助对策都有Shapley值。当I剖分得越来越细时,辅助对策的Shapley值所趋于的极限(在一定意义上)就是渐近值。下面用严格的数学语言介绍这种方法。

设Π是局中人集合I的一个剖分。称Π是可测的,如果Π的诸成员皆为可测集①;称另一剖分Π'是Π的加细,如果Π的每个成员都是Π'中一些成员的并。对于I的一个剖分序列$\Pi_1,\Pi_2,\cdots$,称之为单调递降的,如果每个Π_{m+1}都是Π_m的加细;称之为可分的,如果对于每一对$s,t\in I,s\neq t$,都存在某Π_m,使得s,t处于Π_m的不同成员之中。一个单调递降、可分且可测的剖分序列称为可纳序列(admissible sequence)。例如,令

$$\Pi_m=\left\{\left[0,\frac{1}{2^m}\right],\left(\frac{1}{2^m},\frac{2}{2^m}\right],\cdots,\left(1-\frac{1}{2^m},1\right]\right\}$$

则$\Pi_1,\Pi_2,\cdots$,就是一个可纳序列。

设v是$(I,\mathscr{B})$上的一个对策,Π是I的一个剖分。定义有限对策(Π,v_Π):

$$v_\Pi(S)=v(\bigcup_{j\in S}j),\quad S\subset\Pi$$

其Shapley值向量记为φv_Π.现设$T\in\mathscr{B}$,$\boldsymbol{\Pi}=\{\Pi_1\Pi_2,\cdots\}$是一个单调递降的可测剖分序列,其第一项是剖分$\{T,I-T\}$.对于每个$m$,

① 这里及以下,可测均指Borel可测。

令

$$T_m = \{j \in \Pi_m \mid j \subset T\}$$

T 是无限对策 v 中的一个联盟，T_m 则是对应有限对策 v_{Π_m} 中的相应联盟。如果$(\varphi v_{\Pi_m})(T_m)$当 $m\to\infty$时有极限，则记该极限为$(\varphi_\Pi v)(T)$. 如果这种极限对于一切以$\{T, I-T\}$为首项的可纳序列 Π 都存在，且与 Π 的选择无关，那么就记之为$(\varphi v)(T)$。如果对于所有的可测集 T 情况都是如此，则称 φv 为 v 的渐近值(asymptotic value)。显然，对策 v 的渐近值 φv 如果存在，就一定唯一，而且满足有限可加性。BV 中所有具有渐近值的对策之全体记为 ASYMP.

为便于研究渐近值及空间 ASYMP，我们把变差范数推广到有限对策的情形，这显然可以完全一样地定义出来。对于以 J 为局中人集合的有限对策 u，由 Shapley 值的表达式(7.1.1)，有

$$\|\varphi u\| \leqslant \|u\|$$

其中 φu 是 u 的 Shapley 值向量，从而亦可看成是一个特殊的对策，即非本质对策。显然

$$\|\varphi u\| = \sum_{j\in J} |(\varphi u)(j)|$$

根据(7.1.11)，φu 还可表示为

$$\varphi u = \int_0^1 {}^tR(u)\mathrm{d}t$$

其中${}^tR(u)$的第 i 个分量${}^tR_i(u)$表示各局中人都以概率 t 参加对策时，局中人 i 对其它联盟的期望贡献值：

$${}^tR_i(u) = \sum_{S\subset J} {}^tp(S-i)[u(S) - u(S-i)]$$

这里${}^tp(S-i)$是联盟 $S-i$ 形成的概率，即${}^tp(S-i)=t^{|S|-1}(1-t)^{|J|-|S|}$.

对于$(I,\mathscr{B})$上的对策 $v\in \mathrm{BV}$ 及可测剖分 Π，容易知道

$$\|v_\Pi\| \leqslant \|v\|$$

始终成立。

定理 9.4.1 对于 $v\in$ ASYMP，必有 $\|\varphi v\|\leqslant\|v\|$.

证 对于给定的 $\varepsilon>0$，设 Σ 是集链

$$\Phi=S_0\subset S_1\subset\cdots\subset S_k=I$$

它满足

$$\|\varphi v\|_\Sigma\geqslant\|\varphi v\|-\varepsilon$$

设 $U_j=S_j-S_{j-1}$. 再设 Π_1 为剖分 $\{U_1,U_2,\cdots,U_k\}$，$\overline{\Pi}$ 是以 Π_1 为首项的可纳序列 $\Pi_1,\Pi_2,\cdots$ 对于每一 $T\in\Pi_1$ 及每一 m，设 $T_m=\{j\in\Pi_m\mid j\subset T\}$，那么，

$$\begin{aligned}\|\varphi v\|-\varepsilon\leqslant\|\varphi v\|_\Sigma&=\sum_{T\in\Pi_1}|(\varphi v)(T)|\\&=\sum_{T\in\Pi_1}|\lim_{m\to\infty}(\varphi v_{\Pi_m})(T_m)|\\&=\lim_{m\to\infty}\sum_{T\in\Pi_1}|(\varphi v_{\Pi_m})(T_m)|\end{aligned}\tag{9.4.1}$$

对于固定的 m，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{T\in\Pi_1}|(\varphi v_{\Pi_m})(T_m)|&=\sum_{T\in\Pi_1}\left|\sum_{j\in T_m}(\varphi v_{\Pi_m})(j)\right|\\&\leqslant\sum_{T\in\Pi_1}\sum_{j\in T_m}|(\varphi v_{\Pi_m})(j)|\\&=\sum_{j\in\Pi_m}|(\varphi v_{\Pi_m})(j)|=\|(\varphi v_{\Pi_m})\|\\&\leqslant\|v_{\Pi_m}\|\leqslant\|v\|\end{aligned}$$

将此与(9.4.1)结合在一起，得到 $\|\varphi v\|-\varepsilon\leqslant\|v\|$，令 $\varepsilon\to0$，就得到所要的不等式。

推论 9.4.2 如果 $v\in$ ASYMP，则 $\varphi v\in$ FA.

证 只需说明 φv 是有界的，而这从定理 9.4.1 是显而易见的。

定理 9.4.3 ASYMP 是 BV 的闭线性子空间。

证 ASYMP 显然是线性子空间。现假定 $v^{(k)}\in$ ASYMP，且 $\|v^k-v\|\to 0$. 由定理 9.4.1，$\varphi v^{(k)}$是 Cauchy 序列，因而按照变差范数有一个极限 λ；再由推论 9.4.2，并注意到 FA 是 BV 的闭线性子空间，有 $\lambda\in FA$. 对于任意的 $\varepsilon>0$，取 $v^{(k)}$使得 $\|v^{(k)}-v\|\leqslant\varepsilon$ 和 $\|\varphi v^{(k)}-\lambda\|<\varepsilon$ 同时成立。现设 Π 是一个以$\{T,I-T\}$为首项的可纳序列，$T_m=\{j\in\Pi_m\mid j\subset T\}$，那么

$$
\begin{aligned}
&|(\varphi v_{\Pi_m})(T_m)-(\varphi v^{(k)}_{\Pi_m})(T_m)|\\
\leqslant\ &\|\varphi(v_{\Pi_m}-v^{(k)}_{\Pi_m})\|\leqslant\|v_{\Pi_m}-v^{(k)}_{\Pi_m}\|\leqslant\|v-v^{(k)}\|<\varepsilon
\end{aligned}
$$

所以，

$$
\begin{aligned}
&|(\varphi v_{\Pi_m})(T_m)-\lambda(T)|\\
\leqslant\ &|(\varphi v_{\Pi_m})|(T_m)-(\varphi v^{(k)}_{\Pi_m})(T_m)|\\
&+|(\varphi v^{(k)}_{\Pi_m})(T_m)-(\varphi v^{(k)})(T)|\\
&+|(\varphi v^{(k)})(T)-\lambda(T)|\\
\leqslant\ &\varepsilon+|(\varphi v^{(k)}_{\Pi_m})(T_m)-(\varphi v^{(k)})(T)|+\|\varphi v^{(k)}-\lambda\|\\
\leqslant\ &2\varepsilon+|(\varphi v^{(k)}_{\Pi_m})(T_m)-(\varphi v^{(k)})(T)|
\end{aligned}
$$

令 $m\to\infty$并利用 $v^k\in$ ASYMP，得

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}|(\varphi v_{\Pi_m})(T_m)-\lambda(T)|\leqslant 2\varepsilon$$

因此，上面的上极限为 0，从而相应的极限存在且为 0. 所以 λ 是 V 的渐近值。这就完成了定理的证明。

定理 9.4.4 ASYMP 是 BV 的对称子空间，且由渐近值定义的算子 φ 是 ASYMP 上的一个值。

证 φ 显然是线性的。有效性条件容易从有限对策的相应条件中导出；非负性是定理 9.4.1 和定理 9.3.5 的直接推论；对称性也很容易证明(略去)。

至此已经看到，ASYMP 是 BV 的闭线性子空间，且在其上有值存在。ASYMP 与上一节提出的空间 pNA、bv′NA 有什么关系

呢？为研究这个问题，需要作一些准备。

对于一个固定的可纳序列 Π，记其第 k 项为 $\{A_1^k, A_2^k, \cdots, A_{m^k}^k\}$，并令 $\mu(A_i^k)=\alpha_i^k$，其中 $\mu\in NA^+$. 还记 $\alpha_{\max}^k=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m^k}\alpha_j^k$.

引理 9.4.5 当 $k\to\infty$ 时，$\alpha_{\max}^k\to 0$。

引理的结论非常明显，但证明已超出本书的范围，读者可参考[2]第 131 页足注。

引理 9.4.6 设 $t\in[0,1]$，假定 Π_k 中每个元素出现的概率是 t，S 是 Π_k 中所出现元素的集合（即"随机联盟"）。那么，当 $k\to\infty$ 时，$\mu(S)$ 依概率收敛于 $t\mu(I)$，即对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 k_0，使得当 $k>k_0$ 时

$$\text{Prob}\{|\mu(S)-t\mu(I)|>\varepsilon\}<\varepsilon$$

证 为方便，暂时固定 k，并在书写时略去上标 k. 显然

$$\mu(S)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i X_i$$

其中诸 X_i 是相互独立的随机变量，只取 0，1 两个值，且概率分别为 t 和 $1-t$. 于是

$$E\mu(S)=t\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=t\mu(I),$$

$$\text{Var}\mu(S)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2 V_{ar}X_i=t(1-t)\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2$$

$$\leqslant\alpha_{\max}\sum_{i=1}^{m}\alpha^i=\alpha_{\max}\mu(I)$$

应用切比晓夫不等式，得

$$\text{Prob}\{|\mu(S)-t\mu(I)|>\varepsilon\}<\alpha_{\max}\mu(I)/\varepsilon^2$$

最后由引理 9.4.5 即得所要的结论。

现在已可证明本节最重要的结论了。

定理 9.4.7 pNA⊂ASYMP.

证[①] 由于 ASYMP 是 BV 的闭线性子空间，只需证明对于 $\mu \in NA^+$，对策 $v=\mu^m \in$ ASYMP. 下面不妨假定 $\mu(I)=1$。

先考虑 $'R(v_{\Pi_k})$ 的收敛性。任取 $T\in\mathscr{B}$，假定 Π 以 $\{T, I-T\}$ 为首项。再记

$$H^k = \{i \mid A_i^k \in T_k\}$$

那么，对于 $t\in[0,1]$，

$$[{}'R(v_{\Pi_k})](T_k) = \sum_{i\in H^k}\ \sum_{i\in S\subset \Pi_k}{}' P_k(S-i)[(v(S)-v(S-i)]$$

$$= \sum_{i\in H^k}\ \sum_{i\in S\subset \Pi_k}{}' P_k(S-i)[(\mu(S))^m - (\mu(S-i))^m]$$

$$= m\sum_{i\in H^k}\ \sum_{i\in S\subset \Pi_k}{}' P_k(S-i)x_S^{m-1}\mu(A_i^k) \tag{9.4.2}$$

其中最后一个等式从中值定理得出 x_S 是介于 $\mu(S)$ 与 $\mu(S-i)=\mu(S)-\mu(A_i^k)$ 之间的实数。我们断言，

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i\in S\subset \Pi_k}{}' P_k(S-i)x_S^{m-1} = t^{m-1} \tag{9.4.3}$$

实际上，对于任意正数 ϵ，

$$\left|\sum_{i\in S\subset \Pi_k}{}' P_k(S-i)x_S^{m-1} - t^{m-1}\right|$$

$$= \left|\sum_{i\in S\subset \Pi_k}{}' P_k(S-i)(x_S^{m-1} - t^{m-1})\right|$$

$$\leqslant \sum_{i\in S\subset \Pi_k}{}' P_k(S-i)|x_S^{m-1} - t^{m-1}|$$

$$\leqslant \sum_{\substack{S:|\mu(S)-t|\leqslant\epsilon\\ i\in S\subset \Pi_k}}{}' P_k(S-i)|x_S^{m-1} - t^{m-1}|$$

$$+ \sum_{S:|\mu(S)-t|>\epsilon}{}' P_k(S-i)\cdot 2$$

---

① 证明中有时用 i 表示 Π_k 中的局中人 A_i^k，这并不会导致记号的混淆不清。

右端第二项等于 2Prob$\{|\mu(S)-t|>\varepsilon\}$，根据引理 9.4.6，当 $k\to\infty$时，其极限为 0；第一项不超过

$$\sum_{\substack{S:|\mu(S)-t|\leqslant\varepsilon\\ i\in S\subset\Pi_k}}{}'P_k(S-i)(m-1)|x_S-t|$$

$$\leqslant(m-1)(\varepsilon+\alpha_{\max}^k)\sum_{i\in S\subset\Pi_k}{}'P_k(S-i)$$

$$=(m-1)(\varepsilon+\alpha_{\max}^k)$$

因此，对(9.4.4)两端取极限并利用引理 9.4.5，可以得到

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\sum_{i\in S\subset\Pi_k}{}'P_k(S-i)x_S^{m-1}-t^{m-1}\right|\leqslant(m-1)\varepsilon$$

因 ε 是任意的正数，故相应的极限存在且值为 0，这就证明了(9.4.3)。

现将(9.4.3)代入(9.4.2)，并利用$\sum_{i\in H^k}\mu(A_i^k)=\mu(T)$，有

$$\lim_{k\to\infty}[{}'R(v_{\Pi_k})](T_k)=mt^{m-1}\mu(T)$$

从(9.4.2)还可得到

$$|[{}'R(v_{\Pi_k})](T_k)|\leqslant m\mu(T)$$

于是，应用 Lebesgue 控制收敛定理，当 $k\to\infty$时，

$$(\varphi v_{\Pi_k})(T_k)=\int_0^1[{}'R(v_{\Pi_k})](T_k)\mathrm{d}t$$

$$\to\int_0^1 mt^{m-1}\mu(T)\mathrm{d}t=\mu(T)$$

这对任一以$\{T,I-T\}$为首项的可纳序列 Π 都成立。因此 $\mu^m\in$ ASYMP 且渐近值为 μ，定理得证。

从定理 9.4.7 和定理 9.4.4 可马上推得 pNA 上值的存在性，因此我们用渐近方法——一种完全不同于上一节的方法——重新证明了缺原子对策理论中的一个著名结论。

ASYMP 与 bv′NA 有什么样的关系？是否也有 bv′NA$\subset$ASYMP？这曾经是缺原子对策理论中的著名难题，现已为以色列

数学家 Neyman[9]完全解决，并得出肯定的答案。

参 考 文 献

[1] Aumann R. Recent developments in the theory of the shapley value. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Helsinki, 1978

[2] Aumann R, Shapley L S. Values of Nonatomic Games Princeton Univ. Press, 1974

[3] Ky Fan. On systems of linear inequlities. Ann. of Math. Studies, 1956 (38): 99—156

[4] Delbaen F. Convex games and extreme points. J. Math. Anal. and Appl., 1974(45): 210—233

[5] Dubey P. Asymptotic semivalues and a short proof of Kannai′s theorem. Math. Oper. Res., 1980(5): 267—270

[6] Dunford N, Schwartz J T. Linear Operators, Part 1. Interscience, 1958

[7] Kannai Y. Values of games with a continuum of players. Israeli J. Math., 1966(4): 54—58

[8] Kannai Y. Countably additive measures in cores of games. J. Math. Anal. and Appl., 1969(27): 227—240

[9] Neyman A. Singular games have asymptotic values. Math. Oper. Res., 1981(6): 205—212

[10] Neyman A. Weighted majority games have asymptotic value. Math. Oper. Res., 1988(13): 556—580

[11] Reichert J, Tauman Y. The space of polynomial is measures in internal. Math. Oper. Res., 1985(10): 1—7

[12] Ruckle W H. Projection in certain spaces of set functions. Math. oper. Res., 1982(7): 314—318

[13] Rosenmüller J. On core and value, Operations Research Verfahren. Rudolf Henn eds., 1974

[14] Schmeidler D. Cores of exact games. J. Math. Anal. and Appl., 1971 (40): 214—225

[15] Tauman Y. Value on the space of all scalar integrable games. Game Theory and Related Topics. O. Moeschlin and D. Pallaschke eds.. Amsterdam: NorthHolland, 1978
[16] 黄振高. 具有可数个局中人的连续凸对策. 国防科技大学学报, 1987(1): 81—90
[17] 黄振高. 连续凸对策的谈判集. 国防科技大学学报, 1987(3): 76—80

第十章　对策论在经济学上的应用

对策论与经济学本是两个相互独立的学科。在对策论的早期发展时代，它只是作为数学的一个分支被数学家们所研究，很少引起经济学家们的兴趣或重视。随着对策论的不断发展，人们逐渐认识到经济中的许多问题可用对策论的方法加以解决，一些古老的经济问题还可通过对策论获得最好的表达方式。对策论已不仅仅是数学家们的乐园，其理论、方法和成果已渗透到经济学(和其它社会科学)的许多领域。现在，国际上大多数对策论专家也是经济学家，而许多经济学家也常常以对策论作为其从事研究的必备工具。本章介绍对策论在经济上的若干应用，着重研究市场对策，多头市场垄断和费用分摊等问题。希望更深入地了解各专题的读者可参阅文中提到的参考文献或 Shubik 的专著[19]。

§1　市场对策

这里研究的是一种理想的市场。假定市场里没有生产活动，而只有 n 个商人从事相互之间的交易，目的是希望通过交易获得自己最需要的商品。

仍用 N 表示 n 个商人的集合。假定市场上共有 m 种商品 C_1，$C_2\cdots,C_m$，每个商人拥有的各商品的数量可用一个 m 维商品丛向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$来表示，其中 x_i 表示所拥有的商品 C_i 的数

量。商品丛向量容许的取值范围称为商品空间，记为 G. 在大多数情况下，可取 G 为 R_+^m，即各分量均非负的 m 维向量之全体。这也是这里所采取的作法。

在开始商品交易之前，各商人 i 都有一个初始存货量(initial endowments) $a^i \in G$. n 个初始存货量的全体 $\{a^i | i \in N_i\}$ 记为 A.

最后还有一组效用函数，$U = \{u_i | i \in N\}$，其中 u_i 是定义在 G 上的实函数，用以表示商人 i 对其所拥商品丛的满意程度。在我们的论述中，始终假定各 u_i 是凹的连续函数。

我们所研究的市场由上面所述的四部分组成，有时也用四元组 (N,G,A,U) 来表示。

例 1　三位工人举办一次早餐咖啡茶座，共带了 $m=4$ 种商品(咖啡、茶、糖和牛奶)。第一位工人带了两杯咖啡，但喜欢喝放牛奶的茶；第二位带了一杯茶，但喜欢喝放糖的咖啡；第三位带了两份糖和两份牛奶，但喜欢喝既放牛奶又放糖的咖啡。可将三人的初始存货量表示为

$$a^1 = (2,0,0,0)$$
$$a^2 = (0,1,0,0)$$
$$a^3 = (0,0,2,2)$$

效用函数可表示为

$$u_1(x) = \min\{x_2, x_4\}$$
$$u_2(x) = \min\{x_1, x_3\}$$
$$u_3(x) = \min\{x_1, x_3, x_4\}$$

其中 $u_i(x)$ 可看作当各成份的数量由向量 x 来表示时，第 i 位工人可为自己配制的饮料杯数。

例 2　考虑 n 个商人，每人拥有一只手套——或左手的或右手的。商人之间可以互相买卖手套，且已知每双手套对任何人都值一元钱，而未配成双的单只手套价值为 0。

记 $R(L)$ 为拥有右(左)手套的那些商人之全体，那么初始存

货量可表示为

$$a^i = \begin{cases} (1,0), & i \in L \\ (0,1), & i \in R \end{cases}$$

而效用函数对于各商人都是相同的，可表示为

$$u_i(x) = \min\{x_1, x_2\}$$

例 1 和例 2 有一个重要的差别，这就是，在例 2 中有货币存在，各商人都可用货币来衡量他们的效用，属于效用可转移的情形，而在例 1 中却未必有这样的货币（或其它交换媒介），因而各商人之间也就未必能用相同的尺度来衡量他们的效用，这属于效用不可转移的情形。下面着重讨论前一种情况，对后一种只作简单的介绍。

1.1 效用可转移的情形

假定市场里存在第 $m+1$ 种商品——货币，且各商人都以这种货币来度量他们的效用，在这种情况下，第 i 个商人对商品丛 x 和货币 ξ 的效用是

$$\overline{u}_i(x,\xi) = u_i(x) + \xi$$

这里虽然要求 $x \geqslant 0$，但对 ξ 却没有这个要求，即允许商人出现货币透支的情况。不失普遍性，假定各商人在交易开始之前的货币拥有量均为零。

假定联盟 $S \subset N$ 里的各成员决定以任何可能的方式相互交易。那么，对于满足 $x^i \geqslant 0, \sum\limits_{i \in S} x^i = \sum\limits_{i \in S} a^i$ 和 $\sum\limits_{i \in S} \xi^i = 0$ 的商品丛向量 x^i 和货币拥有量 ξ^i，商人 i 总可通过商品交换和货币转移来达到。经此交易后联盟 S 的总效用变为

$$\sum_{i \in S} \overline{u}_i(x^i, \xi^i) = \sum_{i \in S} u_i(x^i) + \sum_{i \in S} \xi^i = \sum_{i \in S} u_i(x^i)$$

称 G 中的一组向量 $x^S = \{x^i \mid i \in S\}$ 为 S-配置。如果一个 S-配置满足

$$\sum_{i \in S} x^i = \sum_{i \in S} a^i$$

则称之为可行的。为作出一个对策，令 $v(\varnothing)=0$，而对于非空的联盟 S，定义

$$v(S)=\max\sum_{i\in S}u_i(x^i),$$

其中 max 对所有的 S-可行配置 x^S 来取。任何可以用这种方法来表示的对策 (N,v) 就称为市场对策（有时为说明其来源，也称之为由上述市场生成的对策）。

如果各商人都有相同的效用函数 $u_i=u$，则由它生成的市场对策可简单地表示为

$$v(S)=|S|u\left(\sum_{i\in S}a^i/|S|\right) \qquad (10.1.1)$$

（可从效用函数的凹性直接推出上式。）

例 3　在例 2 中，

$$v(S)=\min\{|S\cap R|,|S\cap L|\}$$

如果 $|L|<|R|$，则容易验证对策的核心 $C(v)$ 只有一点 x：当 $i\in L$ 时，$x_i=1$；当 $i\in R$ 时，$x_i=0$（即让每个拥有一只左手套的商人得一元，其他商人得 0）。如果 $|L|=|R|$，则核心就由一切形如

$$x_i=\begin{cases}p, & i\in L\\ 1-p, & i\in R\end{cases} \qquad 0\leqslant p\leqslant 1$$

的向量 x 组成。如果 $|L|>|R|$，则情况与第一种完全对称。

定理 10.1.1　如果 v 是市场对策，则 $C(v)\neq\varnothing$.

证　只需证明 v 是均衡的（定理 6.5.1 或 6.5.4）。设 $\{B_1,B_2,\cdots,B_l\}$ 是 N 上的一个极小均衡类，权向量为 $(y_1,y_2,\cdots,y_l)$. 对于每一 $S\subset N$，设 $x^S=\{x_S^i\,|\,i\in S\}$ 是满足

$$v(S)=\sum_{i\in S}u_i(x_S^i)$$

的 S-可行配置；根据 u_i 的连续性，这样的 S-配置是存在的。

对于每一 $i\in N$，定义

$$x^i=\sum_{k:i\in B_k}y_k x_{B_k}^i$$

那么，$x^i \geqslant 0$，且

$$\sum_{i \in N} x^i = \sum_{i \in N} \sum_{k: i \in B_k} y_k x^i_{B_k} = \sum_{k=1}^{l} \Big(\sum_{i \in B_k} x^i_{B_k} \Big) y_k$$

$$= \sum_{k=1}^{l} \Big(\sum_{i \in B_k} a^i \Big) y_k = \sum_{i \in N} \Big(\sum_{k: i \in B_k} y_k \Big) a^i$$

$$= \sum_{i \in N} a^i$$

所以$\{x^i | i \in N\}$是一N-可行配置。再注意到x^i是诸$x^i_{B_k}$或$i \in B_k$的凸组合及u_i的凹性，有

$$\sum_{k=1}^{l} y_k v(B_k) = \sum_{k=1}^{l} y_k \sum_{i \in B_k} u_i(x^i_{B_k})$$

$$= \sum_{i \in N} \sum_{k: i \in B_k} y_k u_i(x^i_{B_k}) \leqslant \sum_{i \in N} u_i(x^i) \leqslant v(N)$$

所以v是均衡对策。定理得证。

核心的非空性只是市场对策的必要条件，并不能完全刻划市场对策。为做到后面这一点，可引入直接市场(direct market)的概念。

直接市场是一种特殊的市场，其中$m=n$，每一$a^i = e^i$(R^n中的第i个单位向量)、各u_i都相同，而且这个公共的u除了满足通常要求的凹和连续之外，还满足正齐次性，即对一切$\alpha \geqslant 0$，$u(\alpha x) = \alpha u(x)$。因此对于这种市场，它所生成的市场对策可简单地表示为(根据(10.1.1))

$$v(S) = |S| u(e^S / |S|) = u(e^S)$$

定理 10.1.2 对策v是市场对策当且仅当它是完全均衡的。

证明 设v是市场对策。对于任一联盟S，如在原市场中除去$N-S$的所有成员，则所得市场产生的对策即为子对策$v|_S$。因此，$v|_S$是市场对策。根据定理10.1.1，其核心非空。这就证明了v的每个子对策都是均衡的。

反过来，设 v 是完全均衡对策。为证明 v 是市场对策，先从 v 出发作一个直接市场，其效用函数定义为：

$$u(x) = \max\left\{ \sum_{S\subset N} y(S)v(S) \,\middle|\, y(S) \geqslant 0, \sum_{S\subset N} y(S)e^S = x \right\}$$

（$u(x)$的定义与(7.2.19)的 $\bar{v}_B(x)$显然一样，唯一的区别是 u 定义在 R^n_+上，而 $\bar{v}_B$ 定义在 R^n_+的单位方体 Q^n 上。）显然，对于 $x\in R^n_+$，$u(x)$是有限的。根据线性规划的对偶定理，$u(x)$还可表示为

$$u(x) = \min\{\langle z,x\rangle \mid \langle z,e^S\rangle \geqslant v(S), S\subset N\}$$

其中$\langle z,x\rangle$表示 z 与 x 的内积，即 $\Sigma_{i\in N}z_ix_i$. 由此容易知道 u 满足定义中所要求的连续性、凹性和正齐次性。由于 v 是完全均衡的，u 还满足

$$u(e^S) = v(S), \qquad S\subset N$$

但这正好表明由上述直接市场产生的对策就是 v 本身。因此，v 是市场对策。

在对市场对策作进一步研究之前，我们先对市场本身作一点经济分析。

假定市场上有一组价格，即对于每一种商品 C_i，都有一个价格 p_i(可能是负的)用以衡量该商品的货币价值。(这里隐含地假定货币的价格为 1。)面对这些价格，商人 i 就会寻求商品和货币的一种配置(x^i,ξ^i)使其效用

$$\bar{u}_i(x^i,\xi^i) = u_i(x^i) + \xi^i$$

在预算约束

$$\langle p,x^i\rangle + \xi = \langle p,a^i\rangle \qquad (10.1.2)$$

之下达到最大，这里 $p=(p_1,\cdots,p_m)$是价格向量。预算约束指的是诸商人最终得到的商品和货币的总价值应与其初始存货的价值相同。

一般说来，如果每个商人 i 都独立地按照上述的效用最大化为原则来选取其最终的商品与货币的组合(x^i,ξ^i)，那么市场上往

往会出现一些商品供大于求，而另有一些商品供不应求的情况。但假若有这样一个价格向量 p，使市场上各种商品（包括货币）都同时达到供求平衡，即

$$\sum_{i\in N}x^i=\sum_{i\in N}a^i \quad 且 \quad \sum_{i\in N}\xi^i=0$$

则说这种价格向量 p 处于竞争均衡(competitive equilibium)，称 p 为均衡价格。

如将预算约束(10.1.2)改写为 $\xi^i=\langle p,a^i-x^i\rangle$，则可把商人 i 的最大化问题叙述为：给定 $p\in R^m$，求 $x^i\in G$ 使

$$u_i(x^i)+\langle p,a^i-x^i\rangle$$

达到最大，即

$$u_i(x^i)-\langle p,x^i\rangle$$

达到最大。注意最后的表达式表示商品丛 x^i 对商人 i 的效用减去以价格 p 获得 x^i 所需的费用，即商人 i 通过交易获得的"利润"。

于是，我们定义市场的竞争解为这样一个有序偶(p,z^N)，其中 p 是价格向量，$z^N=\{z^i|i\in N\}$是一 N-可行配置，满足$(i\in N)$

$$u_i(z^i)-\langle p,z^i\rangle=\max_{x\in G}[u_i(x^i)-\langle p,x^i\rangle] \quad (10.1.3)$$

即每个商人都使交易利润达到最大。令 $\xi^i=\langle p,a^i-z^i\rangle$，则$\sum_{i\in N}\xi^i=\langle p,\sum_{i\in N}a^i-\sum_{i\in N}z^i\rangle=0$. 所以，$(p,z^N)$是竞争解当且仅当 p 处于竞争均衡。

定理 10.1.3 假定各效用函数 u_i 都是连续可微的凹函数，则所论市场有竞争解。

证 显然，存在一个可行的 N-配置 $z^N=\{z^i|i\in N\}$使

$$\sum_{i\in N}u_i(z^i)=\max\left\{\sum_{i\in N}u_i(x^i)\,\middle|\,\sum_{i\in N}x^i=\sum_{i\in N}a^i,x^i\in G\right\}$$

作拉格朗日函数

$$L(x^1,\cdots,x^n,p)=\sum_{i\in N}u_i(x^i)-\langle p,\sum_{i\in N}x^i-\sum_{i\in N}a^i\rangle$$

据微积分中熟知的结论，存在某 p^0，使得对于每一 i 和每一 j，偏导数

$$\frac{\partial L}{\partial x_j^i}=\frac{\partial u}{\partial x_j^i}-p_j^0$$

在 $x^i=z^i$ 处的值均为 0. 但由 u_i 的凹性，该条件相当于对每一 i，G 上的函数

$$L_i(x^i)=u_i(x^i)-\langle p^0,x^i\rangle$$

在 $x^i=z^i$ 处达到最大值。因此，(p^0,z^N)是竞争解。

定理 10.1.3 的条件可以大幅度减弱，因而在相当一般的条件下仍能保证竞争的存在性。读者可参阅[5]，以获得更一般情况的证明及有关的参考文献。

例 4　考虑例 2 中 $|L|<|R|$ 的情形（请读者自己考虑 $|L|\geqslant|R|$ 的情形）。虽然这时的效用函数不可微，但竞争解仍然存在。实际上，$p=(1,0)$是唯一的均衡价格向量。如要求出相应的可行配置 z^N，可任取 $R_1\subset R$ 使 $|R_1|=|L|$，再令

$$Z^i=\begin{cases}(0,0), & i\in L\\(1,1), & i\in R_1\\(1,0), & i\in R-R_1\end{cases}$$

则函数

$$u_i(x)-\langle p,x\rangle=\min\{x_1,x_2\}-x_1\leqslant 0$$

在 $x=z^i$ 处取值为 0。因此，(p,z^N)是竞争解。

回到前面的市场对策，定义（局中人的）竞争支付，为这样一个向量 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$

$$\alpha_i=u_i(z^i)-\langle p,z^i-a^i\rangle$$

其中(p,z^N)是市场的一个竞争解。这里，α_i 可解释为商品从 z^i 对商人 i 的效用与他在竞争解中获得的货币 $\xi^i=\langle p,a^i-z^i\rangle$之和。

定理 10.1.4　市场对策的任一竞争支付都在核心中。

证　设(p,z^N)是市场的竞争解。那么，对于任何 N-可行配置

$x^N=\{x^i \mid i\in N\}$以及 $i\in N$,有

$$\alpha_i = u_i(z^i) + \langle p, a^i - z^i\rangle \geqslant u_i(x^i) + \langle p, a^i - x^i\rangle$$

两边关于 $i\in N$ 作和,并注意到$\sum_{i\in N}a^i = \sum_{i\in N}z^i = \sum_{i\in N}x^i$,得

$$\sum_{i\in N}\alpha_i = \sum_{i\in N}u_i(z^i) \geqslant \sum_{i\in N}u_i(x^i)$$

由于这对任一可行 N-配置都成立,故

$$\begin{aligned}\alpha(N) &= \max\left\{\sum_{i\in N}u_i(x_i)\,\middle|\,\sum_{i\in N}x^i = \sum_{i\in N}a^i, x^i\in G\right\}\\ &= v(N)\end{aligned}$$

现假定 $y^S=\{y^i \mid i\in S\}$是一 S-可行配置使 $v(S)=\sum_{i\in S}u_i(y_i)$,那么,$\forall\, i\in S$,

$$\alpha_i = u_i(z^i) - \langle p, z^i - a^i\rangle \geqslant u_i(y^i) - \langle p, y^i - a^i\rangle$$

于是

$$\begin{aligned}\alpha(S) &\geqslant \sum_{i\in S}u_i(y^i) - \langle p, \sum_{i\in S}y^i - \sum_{i\in S}a^i\rangle\\ &= \sum_{i\in S}u_i(y^i) = v(S).\end{aligned}$$

这就证明了 $\alpha\in C(v)$。

一般说来,市场对策的核心中除竞争支付之外还有其它支付。但大量的研究表明,当局中人数“变得越来越多”时,核心也就“逐渐收缩”成为竞争支付的集合(参阅[9])。

下面介绍两种特殊的市场对策,即 Owen[15]的线性生产对策和 Kalai[12]的网络流对策。

线性生产对策　设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$是局中人集合。假定每个局中人都拥有一定数量的商品 $C_1,C_2,\cdots,C_m$. 具体而言,局中人 i 拥有 b_{i1}个单位的 C_1,b_{i2}个单位的 C_2,$\cdots$,b_{im}个单位的 C_m. 这些商品本身没有价值,但可用来生产产品 $G_1,G_2,\cdots,G_s$ 在市场上出售,售价分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 还假定生产过程是线性的;每生产一个单位的 G_l 需要 a_{1l} 个单位的 C_1,a_{2l}个单位的 C_2,$\cdots$,a_{ml}个单位的 C_m.

如果联盟 S 中的各成员决定合作起来，将其资源合在一起进行联合生产，那么该联盟所面临的问题就是在其资源限制之下决定各产品的生产规模，以从产品中获得最大利润。换言之，联盟 S 面临着如下一个线性规划问题：

$$\left.\begin{aligned}&\max \quad \sum_{l=1}^{S} p_l x_l \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{l=1}^{S} a_{kl} x_l \leqslant \sum_{i\in S} b_{ik}, \quad k=1,\cdots,m \\ &\qquad\quad x_l \geqslant 0, \quad l=1,\cdots,S\end{aligned}\right\} \tag{10.1.4}$$

该问题的最优值显然有限，记为 $v(S)$。如果对所有的联盟 S 都算出 $v(S)$，我们就得到一个对策 (N,v)。

一般说来，n 个生产者全部联合起来进行生产比分开生产要获得更多的利润。但生产者（局中人）联合之后将面临着两个问题，一是如何按排他们的生产使所获利润达到最大可通过求解线性规划(10.1.4)($S=N$ 的情形)来解决；一是如何将联合后获得的总利润分配给各生产者，使得各厂家对其所得的份额都没有异议，从而不致提出退出联盟的要求。这是一个对策问题，应通过上述对策 (N,v) 加以解决。

可将(10.1.4)改写成如下的向量形式：

$$\left.\begin{aligned}&v(S)=\max \ (p,x) \\ &\text{s.t.} \qquad Ax^T \leqslant b(S) \\ &\qquad\qquad x \geqslant 0\end{aligned}\right\} \tag{10.1.5}$$

其中

$$p=(p_1,\cdots,p_s), \quad x=(x_1,\cdots,x_s)$$

$$b^i=(b_{i1},\cdots,b_{im})^T, \quad b(S)=\sum_{i\in S} b^i$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{ms}\end{bmatrix}$$

由线性规划的对偶定理，

$$\left.\begin{aligned} v(\bar{S}) = \min \quad & yb(S) \\ \text{s.t.} \quad & yA \geqslant p \\ & y \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{10.1.6}$$

将(10.1.5)改写成(10.1.6)的好处是(10.1.6)的可行集不随 S 变化。设 $a^1, a^2, \cdots, a^t$ 是该凸集的所有极点。由于线性规划的最优解总可在极点达到，故

$$v(S) = \min\{a^i b(S) \mid i = 1,2,\cdots,t\} \tag{10.1.7}$$

由此马上可以看出 v 是一个市场对策，相应市场各商人的效用函数均为

$$u(x) = \min\{a^i x \mid i = 1,2,\cdots,t\}$$

商人 i 的初始存货量为 b^i. 因此，线性生产对策是一种特殊的市场对策。特别地，v 的核心一定非空。

亦可直接求出核心中的一点而不必先计算出对策 v. 实际上，设 y^* 是(10.1.6)对应于 $S=N$ 的最优解，则

$$y^* b(N) = v(N)$$

而对每一 $S \subset N$，$y^* b(S)$是(12.1.6)的目标函数在其可行集上的一个值，所以

$$y^* b(S) \geqslant v(S)$$

这表明$(y^* b^1, y^* b^2, \cdots, y^* b^n)$是核心中的一元。

网络流对策　考虑一个有向网络 G，其顶点集和弧集分别为 $M=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}$ 和 $L=\{a_1,a_2,\cdots,a_l\}$. 设 v_1 和 v_m 分别为该网络的起点和终点；定义在 L 上的容量函数为 c. 假定 G 的每条弧 a_i 都被唯一的一个局中人 p_i 控制着(但允许一人控制多条弧)。

现在 G 上定义一个对策 v. 对于每一联盟 S，记 G^S 为从 G 中得来的一个网络，其中 G 的所有顶点都保留着，而弧中只有那些被 S 中各成员控制着的才保留下来。显然，$G=G^N$. 定义 $v(S)$为 G^S 中从起点到终点的最大流量。

可以将 G 看成是一个铁路网络，局中人则视为控制着一些铁路干线的公司。为了使整个铁路系统高效率地运行，一般需要各公司联合起来，将所有的铁路干线投入运行。这里同样遇到两个问题，一是如何按排运输使得运量最大，可以用图论中熟知的算法来解决；二是如何将整个铁路系统所获得的利润分配给各公司，这是一个对策问题。

类似于线性生产对策的情形，可以直接找出核心 $C(v)$ 中的一个元素，而不必事先计算出特征函数 v. 为此，设 A 是 G 的最小割集，根据 Ford 和 Fulkerson 的最大流-最小割集定理，有

$$v(N) = \sum_{a_i \in A} c(a_i). \qquad (10.1.8)$$

对于 $j \in N$，令 x_j 是 A 中由 j 控制着的弧的容量之和(如果 A 中没有一条弧由他控制，则 $x_j = 0$)，那么可以断言 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in C(v)$. 为验证这一点，先注意到由(10.1.8)有 $x(N) = v(N)$。其次，对于任一联盟 S，考虑 A 中属于 G^S 的那些弧的集合 A^S. 显然，A^S 是 G^S 的一个割集，其容量(总和)不小于 G^S 最小割集的容量，而后者正好是 G^S 的最大流量(最大流一最小割集定理)$v(S)$. 因此，$x(S) = A^S$ 的容量 $\geqslant v(S)$，这就证明了 $x \in C(v)$。

上面的 x 可作为给各公司的一种分配方案。对于这种方案，任何联盟都不会认为自己能经营得更好而使其诸成员受益更多，因为 x 是核心中的分配。然而，在这种分配中，可能有这样的情况：某公司的一些干线虽然得到使用，但他却不分得任何利润(即 $x_j = 0$)，这显然是不合理的。要弥补这一缺陷，我们必须选择核心里的其它分配，或采用合作对策其它解的概念，如 Shapley 值、核子等。不过在这种情况下，往往必须在事前完整地计算出特征函数。

1.2 效用不可转移的情形

现在考虑更加一般的情形，即不再假定市场上存在诸商人用

以衡量其商品价值的统一货币(如国际贸易中经常出现的情形)。这时已无法用普通的对策来描述市场,而应该用更一般的 NTU 对策。

根据所给的市场,定义 NTU 对策(N,V)如下:

$$V(S)=\{\alpha\in R^n \mid \text{存在 } x^i\in G, i\in S, \sum_{i\in S}x^i=\sum_{i\in S}a^i \\ \text{使得 } \alpha_i\leqslant u_i(x^i), i\in S\}$$

容易验证这样定义的 V 满足 NTU 对策定义中的四个条件。此外,由效用函数的凹性还可看到 $V(S)$是凸的。

我们把能以这种方式表示的 NTU 对策叫作 NTU 市场对策。

例 5　对于例 1 中的市场,有

$$V(123)=\text{conv}\{(1,2,0),(1,1,1),(0,0,2)\}-R_+^3$$

$$V(13)=\{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\mid\alpha_1\leqslant 0,\alpha_3\leqslant 2\}$$

而对于其它联盟 S

$$V(S)=\{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\mid\alpha_i\leqslant 0,i\in S\}$$

事实上,对于 $N=\{1,2,3\}$,支付向量 $\alpha=(1,2,0)$、$\beta=(1,1,1)$和 $\gamma=(0,0,2)$分别对应于如下商品配置:

$$x^1=(0,1,0,1),\quad x^2=(2,0,2,0),\quad x^3=(0,0,0,1)$$

$$y^1=(0,1,0,1),\quad y^2=(1,0,1,0),\quad y^3=(1,0,1,1)$$

$$z^1=(0,0,0,0),\quad z^2=(0,0,0,0),\quad z^3=(2,1,2,2)$$

而凸包中的支付向量对应于 x^i,y^i,z^i 的适当凸组合。

类似于定理 10.1.1,可以证明 NTU 市场对策一定是均衡的。于是由第十章的 Scarf 定理,其核心一定非空。

与市场对策的核心相对应,我们定义市场本身的核心为这样一种 N-可行配置的全体。对于这种配置,任何一部分商人都无法通过把交易局限于他们内部的办法来使他们每个人都获得比现有配置更好的结果。如果 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$属于市场对策的核心,则满足 $\alpha_i\leqslant u_i(z^i),i\in N$ 的 N-可行配置 $z^N=\{z^i\mid i\in N\}$在市场的核心

当中。反过来，如果 z^N 是市场核心中的一元，则 $\alpha: \alpha_i = u_i(z^i)$ 显然属于相应 NTU 市场对策的核心。因此，市场的核心与相应 NTU 市场对策的核心是两个互相等价的概念。特别地，从后者的非空性可推出市场的核心是非空的。

下面来看一种特殊 NTU 市场(对策)的核心如何在二维平面上形象地表示出来。假定所论市场只有两个商人(分别记为 A 和 B)和两种商品(如大米和钢材)，而 A 和 B 的初始存货量分别为 $(a,0)$ 和 $(0,b)$，即交易开始之前 A 拥有 a 个单位的大米，B 拥有 b 个单位的钢材。

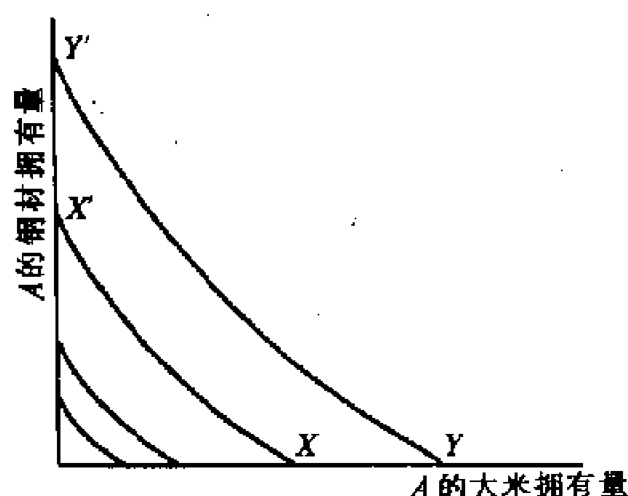


图 10.1.1　商人 A 的等效用曲线

首先，在图上画出商人 A 的一组等效用曲线，即图 10.1.1。从图上看，交易在 XX' 的任意一点上做成，商人 A 的效用值都是一样的，并且小于曲线 YY' 上任一点的效用值。所以，A 会尽量使效用点向右上方移动。由于 u_i 的凹性，等效用曲线都是向下弯曲的。

其次，商人 B 的效用曲线也可以用类似的图形表示，只是应注意到，商人 A 的存货量为 (x,y) 时，商人 B 的存货量就应该是 $(a-x, b-y)$。现把 B 的效用曲线画出来转 180°，然后迭加到 A 的图上，并使 A 图上的点 (a,b) 的位置与 B 图上的原点一致，这样就把两个商人各自的等效用曲线都画在一张图上了。这样得到的图称为 Edgeworth 方框图，即图 10.1.2，方框的长为 a，宽为 b.

显然，商人 A 只会考虑在线段 ED 右上方的某个点上成交，这是因为只有在这些点上他从交易中得到的效用才不会小于 $u_1(a,0)$，即不小于他什么买卖都不做时的效用。同样的道理，B 也

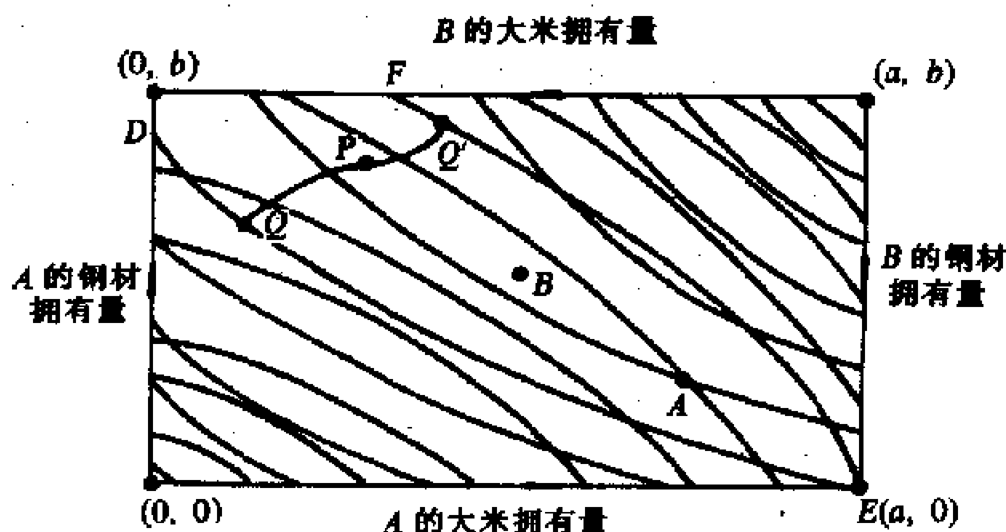


图 10.1.2 Edgeworth 方框图

只会考虑在效用值等于 $u_2(0,b)$的线段 EF 左下方的某个点上成交。此外，如果 A 与 B 的交易在某点 P 上作成了，那么 A 的等效用曲线在 P 点上的切线肯定平行 B 的等效用曲线在这点上的切线。因为假如这两条切线不平行；比如交易在 A 点作成，则两位商人就可以找出另外一点 B，在这点上两个人的效用值都将大于在 A 点上的效用值。

因此，交易的结果会落在线段 ED 与 EF 之间的一条曲线 QQ' 上，这条曲线上的点具有这样的性质：两条等效用曲线的切线是平行的。我们称这样的曲线为成交曲线(contract curve)。不难看出，它就是这个市场的核心。

回到一般的市场。假定市场上有一个价格向量 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_m)$，其中 p_i 表示商品 C_i 的价格。这并不意味着市场上存在货币；价格向量只是代表着商品相互交换时的数量比。面对这组价格，商人 i 将寻求这样一个商品丛 x^i 使其效用 $u_i(x^i)$在其预算约束$\langle p,x^i\rangle\leqslant\langle p,a^i\rangle$下达到最大，即

$$u_i(z^i)=\max\quad u_i(x^i)\qquad(10.1.9)$$

$$\text{s.t.}\quad \langle p, x^i\rangle \leqslant \langle p, a^i\rangle \tag{10.1.10}$$

注意这里由于市场上没有货币，不能要求(10.1.10)成立等号。

二元偶(p,z^N)称为市场的竞争解，如果 p 是价格向量，$z^N=\{z^i|i\in N\}$是一个 N-可行配置，且 z^i 是(10.1.9)－(10.1.10)的解。这里 z^N 称为竞争配置，相应的支付 α：$\alpha_i=u_i(z^i)$称为竞争支付。

在 Edgeworth 方框图中，竞争配置对应于成交曲线上的一点 p'，过该点的两条等效用曲线(分别对应于商人 A 和 B)的公共切线刚好通过代表初始存货的 E 点，而该切线的斜率正好代表着均衡价格。

关于竞争解的存在性，有如下较为一般的定理[16]。

定理 10.1.5 假定各商人的效用函数 u_i 关于每个变量都单调递增，则市场存在竞争解。

类似于定理 10.1.4，我们有

定理 10.1.6 对于一个给定市场及其相应的 NTU 市场对策 V，竞争支付一定在核心 $C(V)$中(相应地，竞争配置一定在市场的核心当中)。

证 设(p,z^N)是竞争解，相应的竞争支付为 α，我们证明 $\alpha\in C(V)$。假如存在 $\beta\in V(S)$使得对一切 $i\in S$，有 $\beta_i>\alpha_i$. 根据 $V(S)$的定义，存在一个 S-可行配置 $x^S=\{x^i|i\in S\}$，满足

$$u_i(z^i)=\alpha_i<\beta_i\leqslant u_i(x^i),\quad i\in S$$

由(10.1.9)，$x^i(i\in S)$一定违反预算限制，即

$$\langle p,x^i\rangle>\langle p,a^i\rangle,\qquad i\in S$$

两边对 $i\in S$ 求和，得

$$\langle p,\sum_{i\in S}x^i\rangle>\langle p,\sum_{i\in S}a^i\rangle$$

这与 $\sum_{i\in S}x^i=\sum_{i\in S}a^i$ 矛盾。因此，$\alpha\in C(V)$。

与定理 10.1.2 不同，这里我们不能用(完全)均衡性来刻划

NTU 市场对策。实际上，如何刻划 NTU 市场对策是对策论中一个尚未解决的难题，读者可参阅[2]，以了解这方面的进展。

§2 不可分商品的一个模型

上一节我们假定商品空间为 $G=R_{+}^{m}$，这意味着商品是无限可分的。但在实际市场里，常常会遇到不可分商品，如飞机、轿车、房子等。对于这种商品的交易问题，现在已有较统一的模型来处理(见[24]或[8])。本节仅考虑一种特殊的情形。

假定有 n 个商人，每个人进入市场出售一种不可分的货物(如房子)。这些货物可以在商人之间自由转让，但每个商人所需货物绝不多于一种。市场上没有货币或其它交换媒介；市场活动的唯一结果是根据各商人对带入市场的 n 种货物的偏爱情况使这些货物的所有权重新分配。这种 n 种货物的重新分配称为一个配置。一个配置称为核心配置，如果不存在少于 n 个商人的联盟 S，使得对于 S 中的商人，还有可能按照比给定的配置对每个人有更好的方式在他们之中进行交易。

为了用对策论研究这个问题，我们用一个方阵(称为偏好矩阵)$A=(a_{ij})$来表示各商人的偏好情况，其中 $a_{ij}>a_{ik}$表示在商人 i 看来，货物 j 比 k 好，而 $a_{ij}=a_{ik}$表示商人 i 觉得 j 和 k 没有区别。由于每个商人只需一种货物，我们假定，对于每个商人来说，拥有货物比不拥有货物总是要好，而拥有多种货物仅与拥有其中最好的那一种一样好。作了这样的假定之后，可以把矩阵 A 的每一行看成是对应商人的效用函数：对于货物的任一集合 S，i 对它的效用为 $\max\limits_{k\in S} a_{ik}$.

货物的一个配置可以用一个 0-1 矩阵 $P=(p_{ij})$来表示，其中 $p_{ij}=1$ 当且仅当交易结束时商人 i 拥有货物 j. 就我们所感兴趣的

情况而言，P 是一个置换矩阵，即它的行和列和都是 1。在一般情况下，我们只要求 P 的列和为 1。

仍用 $N=\{1,2,\cdots,n\}$表示商人的集合。对于任一联盟 $S\subset N$，将 S 中各成员相互交易的结果称为 S-配置。类似地，S-配置可以用一个 $n\times n$ 的 0-1 矩阵 P_S 来表示。显然，P_S 中指标位于 S 的那些列，其列和均为 1，对于指标位于 N-S 的那些行和列，我们约定其元素全为 0。如果一个 S-配置的行和列和都不超过 1，则称之为 S-置换。容易看出，对于一个不是 S-置换的 S-配置(相当于 S 中某人拥有一种以上的货物)，一定存在一个 S-置换，使得 S 中每个商人都认为后者至少有前者那样好，而且其中至少有一个人认为新的 S-配置更好。

每个 S-配置 P_S 都对应于一个 S 上的向量 x_S(称为 S-效用向量)，其中$(x_S)_i(i\in S)$表示商人 i 对所持货物的效用。S-置换对应的 S-效用向量称为 S-置换效用向量。于是，对于每一个 S-效用向量 x_S，一定存在一个 S-置换效用向量 x'_S 使得 $x'_S\geqslant x_S$ 且 $x'_S\neq x_S$.

现在根据上述市场作一个 NTU 对策(N,V)，其中 $V(S)$是由所有 S-置换效用向量生成的集合，即

$$V(S)=\{y\in R^n \mid \text{存在一个 } S\text{- 置换效用向量 } x_S \text{ 使 } y^S\leqslant x_S\}$$

(y^S 为 y 在 R^S 上的投影。)根据上面的说明，$V(S)$包含了所有的 S-效用向量。

不难看出，所述市场中核心配置的存在性与对策(N,V)之核心 $C(V)$的非空性是等价的。实际上，如果存在核心配置，则相应的 N-效用向量就在核心中。反之，假定核心非空，比如 $x\in C(V)$，由 $x\in V(N)$知道有一个 N-置换效用向量 y，使得 $x\leqslant y$. 因为 x 不可优超，故 y 也不可优超。因此，与 y 相对应的 N-置换就是核心配置。

为便于研究对策(N,V)，将 $V(S)$写成更为方便的形式。设 $x\in R^n$，定义 $n\times n$ 的 0-1 矩阵 $B_S(x)$如下：

$$b_{S|ij}(x)=\begin{cases}1, & a_{ij}\geqslant x_i \text{ 且 } i\in S\\ 0, & a_{ij}< x_i \text{ 或 } i\overline{\in} S\end{cases}$$

换言之，$B_S(x)$的第 i 行刚好表示商人 $i(i\in S)$将哪些货物的效用视为至少有 x_i 那么多。借助于矩阵 $B_S(x)$，$V(S)$显然可以写成

$$V(S)=\{x\in R^n \mid \text{存在 } S\text{- 置换 } P_S \text{ 使 } B_S(x)\geqslant P_S\}$$

定理 10.2.1 对策(N,V)的核心一定非空，从而所论市场的核心配置一定存在。

证明 容易看出，特征函数 V 满足第十章 NTU 对策定义中的四个条件。根据 Scarf 定理，只需证明 V 是均衡的。

设 $\mathscr{B}$ 是均衡类，$x\in\bigcap_{S\in\mathscr{B}}V(S)$，又设$\{\delta_S\}_{S\in\mathscr{B}}$是 $\mathscr{B}$ 的一组权系数。那么，

$$B_N(x)=\sum_{S\in\mathscr{B}}\delta_S B_S(x)$$

根据 $V(S)$的定义，对每个 $S\in\mathscr{B}$，都存在一个 S-置换 P_S 使得 $B_S(x)\geqslant P_S$，因此

$$\sum_{S\in\mathscr{B}}\delta_S B_S(x)\geqslant\sum_{S\in\mathscr{B}}\delta_S P_S$$

将右边的矩阵记为 D，于是

$$B_N(x)\geqslant D \tag{10.2.1}$$

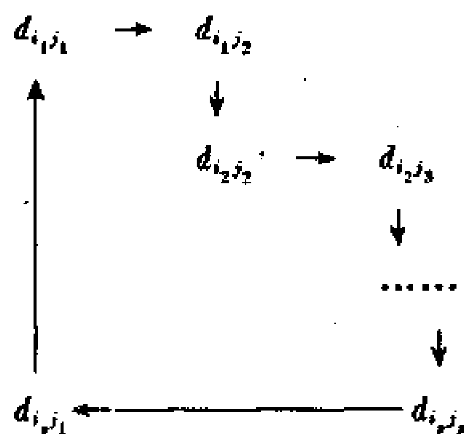
关于 D，一个重要的事实是它是一个双随机矩阵，即行和列和全为 1 的非负矩阵。这可从权系数的定义直接推出；例如，第 i 行的和是

$$\sum_{i\in N}\sum_{S\in\mathscr{B}}\delta_S P_{S|ij}=\sum_{S\in\mathscr{B}}\Big(\sum_{i\in N}P_{S|ij}\Big)\delta_S$$
$$=\sum_{\substack{S\in\mathscr{B}\\ i\in S}}\delta_S=1$$

下一步是把 D 变成一个置换矩阵 P_N，即逐步消除 D 中的非整数元，同时既不改变行和、列和与各元的非负性，也不改变整数元(0 或 1)的值。由于 $B_N(x)$各元只能在 0 和 1 中取值。所以仍能

保证不等式(10.2.1)成立，于是最终可以得到 $B_N(x)\geqslant P_N$.

因为 D 中的非整数元不可能在一行或一列里单独出现，所以要么 D 已经是一个置换矩阵，要么存在一个全由非整数元构成的闭环路：



对闭环路上各元交替地加上和减去一个固定的数 ε，这显然保持行和列和不变。如果 ε 太大，则会出现负元，但可以取尽可能大的 ε 使得环路上不出现负元，这样得到的新的矩阵 D' 就是一个双随机矩阵，而且它的非整数元比 D 少。如果 D' 还不是转置矩阵，则重复上述运算。最终必然得到一个转置矩阵 P_N 使得 $B_N(x)\geqslant P_N$. 因此，$x\in V(N)$。这就证明了 $\bigcap_{S\in\mathscr{B}} V(S)\subset V(N)$，即 V 是均衡的。

例 1　设 $n=3$，表示商人之偏爱的偏好矩阵是

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

这意味着第一和第三商人只要第二个商人的货物，而第二个商人则认为第一和第三商人的货物一样好。

特征函数可表示为 $V(S)=Y(S)-R^S_+$，其中 $Y(S)$ 如下所示：

$Y(1)$: $(0,-,-)$

$Y(2)$: $(-,0,-)$

$Y(3)$: $(-,-,0)$

$Y(12)$: $(1,1,-)$

$Y(23)$: $(-,1,1)$

$Y(13)$: $(0,-,0)$

$Y(123)$: $(1,1,0)$和$(0,1,1)$

这里采用简略的记号，如$(1,1,-)$表示集合$\{(1,1,x_3)|x_3$任意$\}$。所以，各$V(S)$都是有"棱角"的集合，如图 10.2.1 所示。这个对策的核心形状如"L"，相继的三个顶点分别为$(1,1,0)$，$(0,1,0)$和$(0,1,1)$。由此可以得到四个核心配置，这就是将货物 2 分配给商人 1 或 3，其余两种任意分给剩下的两个商人。当然，就本例而言，这四个核心配置亦可从问题本身直接得出。

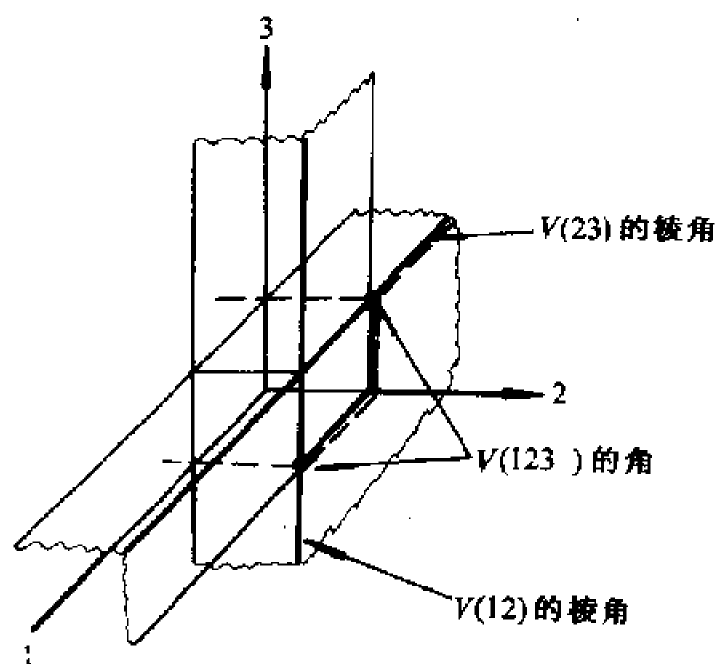


图 10.2.1

一般地，Gale[19]曾经提出一种直接求出一个核心配置的方

法，这也就给出了核心配置之存在性的构造性证明。下面介绍这种方法。

设 $R\subset N$，S 是 R 的一个非空子集。如果 S 可以写成

$$S=\{i_1,i_2,\cdots,i_s=i_0\}$$

其中每个商人 i_k 都认为 i_{k+1} 是 R 中最好的货物（最好的货物可能不止一种，i_{k+1} 仅是其中之一），则称 S 为 R 的一个最惠交易圈(top trading cycle)。显然，N 的每一非空子集都至少有一个最惠交易圈，我们可以从 R 中任一商人出发，让他在 R 中选择一个最喜爱的货物，该货物的拥有者再在 R 中选择一个自己最喜爱的货物，如此等等，得到一个货物（或商人）链，它最终总是要回到先前已作过选择的一个商人。注意，最惠交易圈可以由单个商人组成，这时该商人最喜欢他自己的货物。

基于这一概念，取 S^1 为 N 的任一最惠交易圈，接着取 S^2 为 $N-S^1$ 的任一最惠交易圈，然后再取 S^3 为 $N-(S^1\cup S^2)$ 的任一最惠交易圈，如此继续，直到取尽 N 的元素为止。这样就把 N 剖分成一些不相交的集合。

$$N=S^1\cup S^2\cup\cdots\cup S^p$$

现在根据每个交易圈所表示的交易作一个配置，即如果 $i=i_k^l\in S^l$，则将货物 i_{k+1}^l 分配给 i. 我们断言这样的配置就是核心配置。

实际上，设 S 是任一联盟，考虑第一个满足 $S\cap S^j\neq\varnothing$ 的 j. 于是

$$S\subset S^j\cup S^{j+1}\cup\cdots\cup S^p=N-(S^1\cup\cdots\cup S^{j-1})$$

设 $i\in S\cap S^j$. 那么 i 已在这个配置中得到 S 中最好的货物，所以通过 S 内部的交易不可能使他得到更好的结果。这表明联盟 S 无力对现有配置加以改进。因此，所论配置就是核心配置。

例 2　设 $n=5$，偏好矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}4&3&1&2&5\\4&3&1&2&5\\4&3&5&1&2\\1&4&3&5&2\\4&5&2&1&3\end{pmatrix}$$

这时{1,2,3,4,5}有唯一的最交易圈{1,3,4}.{2,5}有两个不相交的最惠交易圈,即{2}和{5}。由此得到这样一个核心配置,即1取3的货物,3取4的货物,4取1的货物,最后两人各自保留自己的货物。

§3 多头市场垄断

描述生产相同(或密切相关)的产品的几家企业之间的竞争现象,是经济理论反复研讨的一个问题。在只涉及两家企业的竞争时,这种理论叫做双头市场垄断理论,多于两家时叫多头市场垄断理论。竞争的厂家可以分别决定各自的产量,这就决定了买方愿意支付的价格。可以把生产厂家作为一对策的局中人,利润是局中人的支付,各局中人的目标都是获取最大利润。把这样的模型作为合作或非合作对策来研究,可以了解到市场平衡、企业间的勾结以及各种定价形式的确切含义。

假定有 n 个厂家(其全体构成集合 N)生产同一种产品在市场上出售。设 x_i 为第 i 个厂家决定生产的数量。再设 L_i 是 x_i 的上界,即第 i 个厂家所能产出的最大产量;P 是市场价格,它依赖于市场上的产品总量 $x_1+x_2+\cdots+x_n$;C_i 是 i 的成本函数。这时厂家 i 的利润可表示为

$$\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_iP(x_1+x_2+\cdots+x_n)-C_i(x_i)$$

如记厂家 i 的策略集为

$$X_i = \{x_i | 0 \leqslant x_i \leqslant L_i\}$$

就得到一个 n 人对策 $\Gamma=(N,\{x_i\},\{\varphi_i\})$，称为多头龙断对策。

把 Γ 作为一个非合作对策，其平衡点，即满足

$$\varphi_i(x^*) = \max_{x_i \in x_i} \varphi_i(x_1^*, \cdots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \cdots, x_n^*), i = 1, 2, \cdots, n$$

的 n 重策略 $x^*=(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ 称为所论市场的 Cournot 均衡解。它代表着这样一种市场状态，当其它产家的产量固定了以后，厂家 i 的 Cournot 均衡产量就是使它获得最大利润的产量，而且这对所有厂家都成立。

Cournot 均衡是否存在？这是多头市场垄断理论中的一个重要问题。针对这个问题，我们对价格函数 P 和成本函数 C_i 作如下假定：

(a) 存在实数 $\xi > \sum_{i \in N} L_i$ 满足

i) 当 $x \geqslant \xi$ 时 $P(x)=0$；

ii) 在$[0,\xi]$上 P 是单调递减的连续凹函数；

(b) C_i 是$[0,L_i]$上单调递增的连续凸函数。

(a)中的 i)指的是，当商品量超过某一界限时，消费者就可以随取所需，不必付费；ii)则指在这一界限之内，价格随产量的增多逐渐下降，而且下降速度越来越慢。(b)可解释为生产成本随产量的增加而增长，而且增长速度越来越快。

定理 10.3.1 如果价格函数和成本函数满足假设(a)和(b)，则 Cournot 均衡一定存在。

证 由定理 6.1.1，只需说明利润函数 φ_i 关于第 i 个变量是凹的，即证明

$$\psi_i(t) = tP(a+t) - C_i(t)$$

是 X_i 上的凹函数，其中 a 是与 t 无关的常数，满足 $a+L_i \leqslant \xi$.

任取 $t_2, t_1, t, t_2 > t > t_1$，由 P 的单调递降性，$P(a+t)-P(a+t_1) \leqslant 0$，再由凹性

$$\frac{P(a+t_2)-P(a+t)}{t_2-t}\leqslant\frac{P(a+t)-P(a+t_1)}{t-t_1}\leqslant 0$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{t_2P(a+t_2)-tP(a+t)}{t_2-t}\\&=t_2\frac{P(a+t_2)-P(a+t)}{t_2-t}+P(a+t)\\&\leqslant t_1\frac{P(a+t)-P(a+t_1)}{t-t_1}+P(a+t)\\&=\frac{tP(a+t)-t_1P(a+t_1)}{t-t_1}\end{aligned}$$

这正好表明 $tP(a+t)$是凹的。最后由 C_i 的凸性知道 $\varphi_i(t)$是凹函数。

定理 10.3.1 的条件可以大幅度放宽，但证明要比这里复杂得多，读者可参阅[7]。

下面把多头垄断对策作为合作对策来处理，即允许厂家之间的相互联合，结成联盟，以获取最大的利润。这里的问题仍然是联盟的利润如何在各厂家之间进行分配，这需要计算出对策的特征函数。为此假定定理 10.3.1 的条件仍然满足。

设 $S=\{i_1,i_2,\cdots,i_r\}\subset N$，根据特征函数的定义

$$v(S)=\max_{\substack{x_i\in X_i\\ i\in S}}\ \min_{\substack{x_j\in X_j\\ j\bar{\in} S}}\sum_{i\in S}\varphi_i(x) \tag{10.3.1}$$

要算出 $v(S)$，必须先算

$$\min_{\substack{x_j\in X_j\\ j\bar{\in} S}}\sum_{i\in S}\varphi_i(x)=\psi_s(x_{i_1},\cdots,x_{i_r})$$

我们区别两种不同情况：

(1) $\sum_{j\bar{\in} S}L_j\geqslant\xi$. 这时显然有

$$\psi_S(x_{i_1},\cdots,x_{i_r})=-\sum_{i\in S}C_i(x_i)$$

因为 C_i 是单调递增函数，故 ψ_S 必在 $x_{i_1}=\cdots=x_{i_r}=0$ 处达到最大值。因此，$v(S)=-\sum_{i\in S}C_i(0)$。

(2) $\sum_{j\bar{\in}s}L_j<\xi$. 这时由 P 的单调递减性，

$$\psi_S(x_{i_1},\cdots,x_{i_r})=\Big(\sum_{i\in S}x_i\Big)P\Big(\sum_{j\bar{\in}S}L_j+\sum_{i\in S}x_i\Big)-\sum_{i\in S}C_i(x_i) \tag{10.3.2}$$

记 $L_S=\sum_{i\in S}L_i$，$\tilde{L}_S=\sum_{j\bar{\in}S}L_j$，则(10.3.2)就是

$$\psi_S(x_{i_1},\cdots,x_{i_r})=t_SP(\tilde{L}_S+t_S)-\sum_{i\in S}C_i(x_i) \tag{10.3.3}$$

其中 $t_S=\sum_{i\in S}x_i$. 现求解凹规划问题：

$$\left.\begin{aligned}&\min \quad \sum_{i\in S}C_i(x_i)\\&\text{s.t.}\quad 0\leqslant x_i\leqslant L_i,\quad i\in S\\&\qquad\quad \sum_{i\in S}x_i=t_S,(t_S\in[0,L_S])\end{aligned}\right\} \tag{10.3.4}$$

设 $Q_S(t_S)$ 是它的最优值。不难证明，Q_S 是 $[0,L_S]$ 上的连续凸函数。再考虑规则问题

$$\left.\begin{aligned}&\max \quad t_SP(\tilde{L}_S+t_S)-Q_S(t_S)\\&\text{s.t.}\quad 0\leqslant t_S\leqslant L_S\end{aligned}\right\} \tag{10.3.5}$$

记其目标函数为 g. 自 Q_S 的凸性知道 g 是 $[0,U_S]$ 上的凹函数，这里 $U=\min\{\xi-\tilde{L}_S,L_S\}$. 因此，(10.3.5)的最优解 t_S^* 可确定如下：

$$t_S^*=\begin{cases}0, & \text{若 } g'(+0)\leqslant 0;\\ U_S & \text{若 } g'(U_S-0)\geqslant 0;\\ 0<v<U_S, & \text{若 } g'(t-0)\geqslant 0\geqslant g'(t+0).\end{cases} \tag{10.3.6}$$

式中 g 的单边导数的存在性由 g 的凹性来保证。至此，我们证明了

$$v(S) = \begin{cases} -\sum_{i \in S} C_i(0), & \text{当 } \widetilde{L}_S \geqslant \xi; \\ g(t_S^*), & \text{当 } \widetilde{L}_S < \xi. \end{cases}$$

有了特征函数，就可以来计算该对策的 Shapley 值和核子——看来两者都没有方便的办法。另外，这种对策的核心和稳定集是否存在？形状如何？这些问题迄今都没有答案。

§4 费用分摊问题

在现实生活中常常会遇到这样的情况：一些人或机构联合从事某项活动，希望通过这种方式使得每个人应支付的费用比单独从事这项活动或作小范围联合时的费用少。他们怎么"公平地"分摊费用呢？这曾是经济理论中长期没有解决的一个棘手问题。现在，费用分摊问题已有一些处理方法，但我们并不打算对此作详细的论述，因为这本身已足以写成一本书。下面通过两个实例来说明合作对策在这方面的用处，然后简要介绍一种处理一般费用分摊问题的方法。

4.1 网络上的费用问题

有很多费用分摊问题与图论、网络流和选址理论有关，这里我们从一个简单的例子开始讨论。假定有三座城市 1,2,3 准备建立一个有线电视网，这需要在不同城市之间架设电线，还得在附近的一座山上建造一个接收塔（用 0 标记，称为源点）。城市 i 与 j 之间或接收塔与城市之间的架线费用由如下六个数来表示

$$C_{ij}, \quad 0 \leqslant i < j \leqslant 3$$

如图 10.4.1 所示。这里必须找出一种把各城市都连接到 0 点的最省钱的办法，可用图论中求最小费用生成树的贪婪算法来完成。另一方面，还得把架线的总费用分摊给三座城市。因此，这里的问题

与第一节遇到的线性生产问题和网络流问题属于同一种类型，只是那里分配的是利润，而这里要分摊费用。

对于这三座城市的任一子集 S，也可以算出将 S 中所有城市连接到源点 0 的最小费用，方法是找出相应子图的最小费用生成

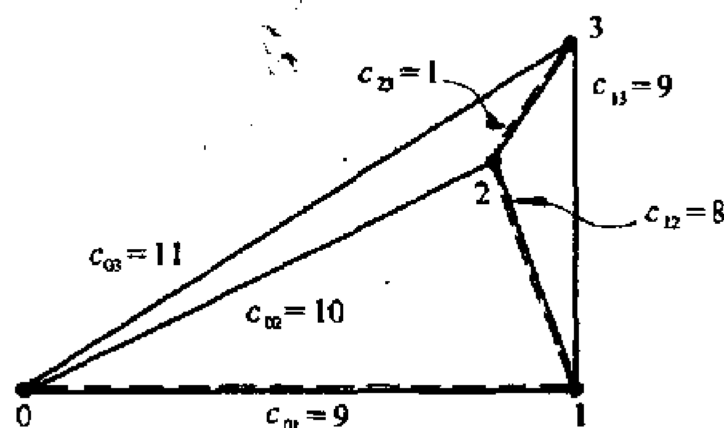


图 10.4.1

树。于是，费用函数可算出为

$$c(1)=9,\quad c(2)=10,\quad c(3)=11,$$
$$c(123)=18,\quad c(12)=17,\quad c(13)=18,$$
$$c(23)=11.$$

这样就得到一个三人费用对策 c，称为最小费用生成树对策(minimum cost spanning tree game)。由于这里考虑的是费用，而不是收入，所以在合作对策的有关定义中不等式要反向。于是，分配集是

$$A=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1+x_2+x_3=18x_1\leqslant 9,x_2\leqslant 10,x_3\leqslant 11\}$$

核心为

$$C=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1+x_2+x_3=18,$$
$$7\leqslant x_1\leqslant 9,0\leqslant x_2\leqslant 10,1\leqslant x_3\leqslant 11\}$$

这个对策的核子可算出为

$$v=\left(8,\frac{9}{2},\frac{11}{2}\right)$$

Shapley 值为

$$\varphi=\left(\frac{23}{3},\frac{14}{3},\frac{17}{3}\right)$$

两者都可作为分摊费用的一种方案。

针对这个具体例子，我们再考虑一些传统的费用分摊方法。先看常用的"按用取费"法，这时每座城市必须(且只须)为它所使用的每一段线路付费，而且每段线路所付费用与使用这段线路的局中人数成反比。因此，由图 10.4.1 可见，1 只需付连接 0 和 1 所需费用 c_{03}的 1/3，即 3；2 需支付 c_{03}的 1/3(3)和 c_{12}的 1/2(4)，总计 7；3 需支付 c_{01}的 1/3(3)、c_{12}的 1/2(4)和 c_{23}，总计 8. 于是所得费用向量为

$$\alpha=(3,7,8)$$

另有一些方法考虑增加一个成员所引起的费用增量(称为"边际费用")。例如，可考虑"初始增量"(initial increment)。三座城市分别架线与 0 相连，所需费用分别为 9、10 和 11，而联合起来时只需 18，现将 18 按这个初始增量的比例，即 9:10:11 分摊给三座城市，得到

$$\beta=\left(\frac{27}{5},\frac{30}{5},\frac{33}{5}\right)$$

当然，也可以按"最后增量"(last increment)来分摊费用。一个人的最后增量是指三人联合的总费用与其它两人的联合费用之差，于是分别为 7，0，1. 按此比例分摊费用，所得费用向量为

$$\gamma=\left(\frac{63}{4},0,\frac{9}{4}\right)$$

显然，α 和 β 都不在费用对策的核心 C 中，这里城市 1 承担的费用太少，致使 2、3 两座城市独立出来更为合算。γ 不在分配集 A 中，这里城市 1 承担费用太多，已完全不能接受，因为它独立行动

只需花费 7 个单位。

下面再来看一般的最小费用生成树对策。设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 是用户(局中人)集合,0 是公共的服务源。假定 $C=(c_{ij})(i,j=0,1,\cdots,n)$是一个费用矩阵,其中 c_{ij}通常表示连接 i 与 j 所需的费用(于是 C 是一个对称矩阵,且对角线各元值为 0)。对于任一联盟 $S\subset N$,以 $S\cup\{0\}$为顶点集的最小费用生成树记为 $\Gamma_S=(V_S,E_S)$,其中 V_S 为 Γ_S 的顶点集,即 $V_S=S\cup\{0\}$,E_S 是 Γ_S 边的集合。Γ_S 的费用 $\sum_{(i,j)\in E_S} C_{ij}$,即把 S 中诸成员连接到源点所需的最小费用记为 $c(S)$. 这样得到的对策(N,c)就是一般的最小费用生成树对策。

现考虑大联盟 N 的最小费用生成树 $\Gamma_N=(V_N,E_N)$。对于每一 $i\in N$,记 $e^i=(i,j(i))$为 Γ_N 中连接 i 与 0 的唯一路径中与 i 相邻的边。作向量 $x(\Gamma_N)=(x_1(\Gamma_N),\cdots,x_n(\Gamma_N))$,其中 $x_i(\Gamma_N)$为 e^i 的费用,即 $x_i(\Gamma_N)=C_{ij(i)}$. $x(\Gamma_N)$显然是个分配,且可以从最小费用生成树中直接读出。例如,对于图 10.4.1 的最小费用生成树,$x=(9,8,1)$.

对于 $S\subset N$,记 $X_S=\{e^i\mid i\in S\}$,$\overline{X}_S=E_N-X_S$. 对于任一边的集合 B,记 $m(B)=\sum_{(i,j)\in B}C_{ij}$. 于是

$$c(N)=m(X_S)+m(\overline{X}_S) \tag{10.4.1}$$

我们注意到,如果$(i,j)\in\overline{X}_S$,则 $i\in N-S$ 和 $j\in N-S$ 中至少有一个成立;如果$(i,j)\in E_S$,则 $i\in S\cup\{0\}$和 $j\in S\cup\{0\}$同时成立。因此,

$$E_S\cap\overline{X}_S=\varnothing \tag{10.4.2}$$

定理 10.4.1 对于 $N\cup\{0\}$的任一最小费用生成树 Γ_N,必有 $x(\Gamma_N)\in C(N,c)$. 特别地,最小费用生成树对策的核心非空。

证明 任取 $S\subset N$,必须证明

$$\sum_{i\in S}x_i(\Gamma_N)\leqslant c(S)$$

沿用上面引入的记号，这可改写为

$$m(X_S) \leqslant c(S) \tag{10.4.3}$$

为证明(10.4.3)，先证 $Y_S=(V_N, E_S \cup \overline{X}_S)$ 是树。

实际上，由(10.4.2)，$|E_S \cup \overline{X}_S| = |S| + n - |S| = n$，所以只需证明对于每一 $a_1 \in V_N$，$\overline{X}_S$ 中必有一条路径(可能长度为 0)从 a_1 出发通向 V_S 中的一个顶点。设 $A_1=\{e^{a_1}, e^{a_2}, \cdots\}$ 是 E_N 中从 a_1 到 0 的唯一路径，其中 $e^{a_i}=(a_i, a_{i+1})$，$i=1,2,\cdots$. 如果 $A_1 \subset \overline{X}_S$，则 A_1 本身就是要找的路径，因为 $0 \in V_S$. 如果 $A_1 \not\subset \overline{X}_S$，设 e^{a_k} 是 A_1 的第一条不在 $\overline{X}_S$ 中的边。那么，$e^{a_k} \in E_N - \overline{X}_S = X_S$，于是由 X_S 的定义，$a_k \in S \subset V_S$. 因此，$\{e^{a_1}, \cdots, e^{a_{k-1}}\}$ 就是所求的路径。

基于上述结果，并注意到 Γ_N 是最小费用树，有

$$m(E_S \cup \overline{X}_S) \geqslant c(N)$$

由(10.4.1)和(10.4.2)，上式可写成

$$m(E_S) + m(\overline{X}_S) \geqslant m(X_S) + m(\overline{X}_S)$$

即

$$m(X_S) \leqslant m(E_S) = v(S)$$

这就证明了(10.4.3)。因此，$x(\Gamma_N) \in C(N, c)$。

基于上述定理，总可以从 $N \cup \{0\}$ 的最小费用生成树中直接读出费用的一种分摊方案。这一方案实际上就是要求每个用户给把他连到源点的第一段线路付全部的费用，而不管其它用户是否也使用了这段线路。(这与"按用取费"完全不同。)虽然这看来有点不公平，但它具有联盟稳定性，即任何联盟都无法通过独立出来的办法来降低其中每一个成员的费用。

这种方案的缺陷启示我们考虑 Shapley 值和核子，但关于最小费用生成树对策的这两种解，目前尚无方便的计算方法，部分结果见[9]。

4.2 机场收费问题

考虑机场对降落飞机的收费问题。假定有一个中型机场，其跑

道长度为 5000 米，每年维持正常运行需要花费 30 万元。机场管理部门决定这 30 万元全部从飞机降落费用中收回。按飞机降落所需跑道的(最小)长度来分，有五种不同类型的飞机在这里降落，每年总共有 6000 架次。现假定只按飞机所需跑道的长度来对每次降落进行收费，而对其它因素，如容量、机重及各种服务项目都不加考虑。问题是不同类型的飞机在这里降落一次应收取多少费用才显得比较公平与合理。

用 1,2,3,4,5 表示这五种型号的飞机，且假定这五种飞机每年在这里的降落次数分别为

600、2000、1000、1600 和 800

而所需跑道的(最小)长度分别为(单位：米)

1000、2500、3500、4000 和 5000

先考虑"按用取费"的办法来收费。所有 6000 架次飞机都使用了机场跑道的"第一段"，其长度为 1000 米，因而需要运行费用 30/5=6 万元。所以每降落一次应该为这部分跑道付出的费用是 60000/6000=10 元。因为 1 型飞机只需这么长跑道，所以它降落一次的费用是

$$c_1 = 10(\text{元})$$

其它四种型号的飞机除了使用了这段跑道之外，还使用"第二段"跑道，其长度为 1500 米，运行费用为 9 万元。所以这些飞机每降落一次还应当付出增量 90000/(6000−600)=16.67 元。因此，2 型飞机降落一次收费为 $c_1+16.67$，即

$$c_2 = 26.67(\text{元})$$

同样，剩下三种型号的飞机用了"第三段"的 1000 米，费用为 60000 元，降落一次应该为这段跑道付增量 60000/(6000−600−2000)=17.65 元。所以 3 型飞机降落一次的费用为 $c_2+17.65$，即

$$c_3 = 44.32(\text{元})$$

4 型和 5 型飞机还得为"第四段"的 500 米跑道付费 30000 元，每

次计 30000/(6000－600－2000－1000)＝12.5 元。所以 4 型飞机降落费为 $c_3+12.50$，即

$$c_4 = 56.85(\text{元})$$

5 型飞机除缴纳上述四段的费用外，还得单独承担“第五段”1000 米跑道的运行费用，从而降落一次应收 $c_4+(60000/800)$，即

$$c_5 = 131.82(\text{元})$$

可以验算一下，总收入

$$600c_1 + 2000c_2 + 1000c_3 + 1600c_4 + 800c_5$$

刚好收回了成本 30 万元(舍入误差不计)。

这个收费问题也可以用一个合作对策来表示。注意这里的局中人是实际降落事件，而不是飞机、飞行员或航线。设 N_i 是 i 型局中人(降落事件)之全体，$n_i=|N_i|$. 记

$$N = N_1 \cup \cdots \cup N_m$$

为降落事件的全体，其总数为

$$n = n_1 + \cdots + n_m$$

假定 i 型局中人的服务成本(如建造 i 型飞机所需跑道的费用)为 c_i，且

$$0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_m$$

现作费用对策 (N,c)，其中 $c(\varnothing)=0$

$$c(S) = \max\{c_i \mid N_i \cap S \neq \varnothing\}, \quad S \subset N$$

即一个降落事件的子集的总费用与其中最花钱的那个降落事件相同。

记

$$R_k = \bigcup_{i=k}^{m} N_j, \quad r_k = \sum_{j=k}^{m} n_j$$

并作 m 个特征函数 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 如下：

$$v_k(S) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } S \cap R_k = \varnothing; \\ c_k - c_{k-1}, & \text{如果 } S \cap R_k \neq \varnothing. \end{cases}$$

那么费用对策 c 可表示为

$$c=\sum_{k=1}^{m}v_k \tag{10.4.4}$$

这是因为对于任一 $S\subset N$，如记 $i(S)=\max\{i\,|\,S\cap N_i\neq\varnothing\}$，则

$$\sum_{k=1}^{m}v_k(S)=\sum_{k:\,S\cap R_k\neq\varnothing}(c_k-c_{k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{i(S)}(c_k-c_{k-1})=c_i(S)=c(S)$$

利用(10.4.4)，可以很容易地算出费用对策的 Shapley 值。

实际上，对于每一 k，R_k 是 v_k 的一个载子，且 v_k 在 R_k 上是对称的(即交换 R_k 中任何两个局中人的名称，v_k 不变)，所以

$$\varphi_i(v_k)=\begin{cases}0 & i\overline{\in}R_k\\ \dfrac{C_k-C_{k-1}}{r_k}, & i\in R_k\end{cases}$$

因此，如果 $i\in N_j$，则

$$\varphi_i(c)=\sum_{k=1}^{m}\varphi_i(v_k)=\sum_{k=1}^{i}\frac{C_k-C_{k-1}}{r_k}$$

将 Shapley 值与前面的具体计算作比较，我们发现，$(C_k-C_{k-1})/r_k$ 正好是向 R_k 中各局中人收取的费用增量。因此，就机场收费问题而言，“按用取费”与 Shapley 值方法是一致的。

上述对策的核子也可用特殊的方法来计算，详见[16].

除了机场收费问题之外，还可以考虑其它服务部门，尤其是通讯与交通部门的收费问题，如电话收费问题、道路收费问题等。这些问题的一个共同特点是有大量的“小用户”，每个用户都只作很小规模的使用，从而边际费用都到了可以忽略不计的程度。关于对策论在这方面的应用，读者还可参阅 Raanan 的博士论文[17]。

4.3 一般的费用分摊问题

设想有一个生产过程，产出 n 种不同的产品(或服务)。如要生

产 x_i 个单位的第 i 种产品，$i=1,2,\cdots,n$，厂家就得承担生产费用 $f(x_1,\cdots,x_n)$。现假定第 i 种产品的产量为 α_i，$i=1,2,\cdots,n$，那么如何将花去的费用 $f(\alpha_1,\cdots,\alpha_2)$按单位费用(生产一个单位应支付的费用)的形式向各产品收费？这是一般的费用分摊问题。

在有些场合，这个问题很简单。例如，如果只有一种产品，生产费用为 $f(x)$，那么产出 $\alpha>0$ 个单位，每单位费用就是 $f(\alpha)/\alpha$. 这也是唯一能收回总成本 $f(\alpha)$的收费办法。同样，如果生产 $x_1,\cdots,x_n$ 的费用是一个可分的函数 $f(x_1,\cdots,x_n)=f_1(x_1)+\cdots+f_n(x_n)$，那么，对于 $\alpha_i>0$ 的那些产品，其单位费用就应该是 $f_i(\alpha_i)/\alpha_i$. 注意这已包括了 f 是线性函数，即 $f(x_1,\cdots,x_n)=C_1x_1+\cdots+C_nx_n$ 的情形，这时产品 i 的单位费用是 C_i.

但是，如果 f 不是可分的，那么问题的答案就不那么明显。这里我们采用类似于对策论中处理合作对策(尤其是缺原子对策) Shapley 值的公理方法来考虑费用分摊问题。

为便于叙述，定义 n 阶费用分摊问题为这样一个二元偶(f,α)，其中 $\alpha>0$(即各分量为正)，$f:R^n_+\to R$ 称为费用函数，满足 $f(0)=0$，且具有连续的一阶偏导数。记 P^n 为所有 n 阶费用分摊问题的全体，再令 $P=\bigcup_{n=1}^{\infty}P^n$. 函数 $c:P\to\bigcup_{n=1}^{\infty}R^n$ 如果满足：$(f,\alpha)\in P^n\Rightarrow c(f,\alpha)\in R^n$，则称之为一个费用分摊规则(cost allocation procedure)。

作为一个费用分摊规则，它首先应该使人通过收费完全收回生产花去的费用，即

$$\langle c(f,\alpha),\alpha\rangle=f(\alpha) \tag{10.4.5}$$

这相当于 Shapley 值中的有效性公理。

类似于可加性公理，我们假定$(h,\alpha)\in P^n$，其中 $h=f+g$，且$(f,\alpha),(g,\alpha)\in P^n$. 函数 f 和 g 可视为 h 的两个分费用，例如 f 可能代表原材料费用，g 代表劳动力费用。如果个别地分摊原材料费

用和劳动力费用(即算出 $c(f,\alpha)$ 和 $c(g,\alpha)$),然后将两者加起来,那么所得结果应与直接分摊总费用的结果相同才显得合乎情理。因此,我们要求

$$\text{对于}(f,\alpha),(g,\alpha)\in P^n \text{ 及 } h=f+g,$$
$$c(h,\alpha)=c(f,\alpha)+c(g,\alpha) \tag{10.4.6}$$

现假定有两种产品,比如 x_1 和 x_2 代表的那两种"实际上"是同一种产品,只是所使用的度量单位可能不一样。这时我们自然要求这两种产品的单位费用也可以根据两种不同的单位联系起来。什么时候 x_1 和 x_2"实际上"度量了同一种产品呢?一种答案是费用函数仅依赖于 x_1 和 x_2 的某个线性组合。因此,我们假定费用分摊规则满足:

如果 $f(x)=g(\langle z,x\rangle)$,其中 z 是固定的非零向量,则

$$c(f,\alpha)=c(g,\langle z,\alpha\rangle)z \tag{10.4.7}$$

这对应于 Shapley 值公理中的对称性公理。

类似于非负性公理,我们假定

如果 f 在 $I^\alpha=\{x\in R^n|0\leqslant x\leqslant\alpha\}$ 上关于每个变量都单调递增,则 $c(f,\alpha)\geqslant 0$ (10.4.8)

这相当于,如果每一种产品,生产越多花费也越多,那么每一种产品都应收取(非负的)费用。

定理 10.4.2 存在一个费用分摊规则 c,它满足(10.4.5)—(10.4.8),且可表示为

$$c_i(f,\alpha)=\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(t\alpha)\mathrm{d}t \tag{10.4.9}$$

证 需要验证由(10.4.9)给出的 c 满足(10.4.5)—(10.4.8)。首先,可加性和非负性可从定义直接得出。其次,由

$$\langle c(f,\alpha),\alpha\rangle=\sum_{i=1}^n\alpha_i\int_0^1 f^{(i)}(t\alpha)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t\alpha_1,\cdots,t\alpha_n)\mathrm{d}t=\int(\alpha)$$

知道 c 满足(10.4.5). 最后，设 $f(x)=g(\langle z,x\rangle)$，那么，$f^{(i)}(x)=z_i g'(\langle z,x\rangle)$，因此

$$c_i = \int_0^1 f^{(i)}(t\alpha)dt = z_i\int_0^1 g'(t\langle z,\alpha\rangle)dt = z_i c_0$$

其中 $c_0=\int_0^1 g'(t\langle z,\alpha\rangle)dt=c(g,\langle z,\alpha\rangle)$。因此，$c$ 满足(10.4.7)。定理得证。

还可以进一步证明，(10.4.9)是唯一满足(10.4.5)—(10.4.8)的费用分摊规则，见[3]。

至此我们看到，在假设(10.4.5)—(10.4.8)之下只有一个费用分摊规则，在这个规则里，产品 i 的单位费用是总产量从$(0,\cdots,0)$同步增加到$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$时该产品的平均边际费用。如果费用函数是可分的，即$(f(x_1,\cdots,x_n)=f_1(x_1)+\cdots+f_n(x_n)$，则按此分摊规则，产品 i 的单位费用为 $f_i(\alpha_i)/\alpha_i$. 这正好是开始时我们提出的简单情形收费规则应满足的条件。

参 考 文 献

[1] Billera L J. Economic market games, Game Theory and its Application. Rhode Island, 1981

[2] Billera L J, Bixby R E. Market representations of n-person games. Bull. Amer. Math. Soc., 1974(80): 522-526

[3] Billera L J, Heath D L. Allocation of shared costs: A set of axioms yielding a unique procedure. Math. Oper. Res., 1982(7): 32-39

[4] Billera L J, Heath D L, Verrecchia R E. A Unique procedure for allocating common costs from a production process. J. Accounting Res., 1981(19): 185-196

[5] Debreu G. Four aspects of the mathematical theory of economic equilibrium, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vol I. Vancouver, 1974

[6] Friedman J W. Oligopoly theory, Handbook of Mathematical Economics, Vol 2. K. J. Arrow and M. D. Intriligator eds. Amsterdam: North-Holland, 1982

[7] Friedman J W. Oligopoly and the Theory of Cames. Amsterdam: North-Holland, 1977

[8] Gale D. Equilibrium in a discrete exchange economy with money. Intern. J. Game Theory, 1984(13): 61-64

[9] Granot D, Huberman G. Minimum cost spanning tree games. Math. Programming, 1984(29): 323-347

[10] Hidenbrand W. Core and Equilibria of a large economy, Princeton: Princeton University Press, 1974

[11] Hidenbrand W. Core of an economy, Handbook of Mathematical Economics, Vol 2. K. J. Arrow and M. D. Intriligator eds. Amsterdam: North—Holland, 1982

[12] Kalai E, Zemel E. Generalized network problems yielding totally balanced games. Operations Research, 1982(30): 998-1007

[13] Kalai E, Zemel E. Totally balanced games and games of flows. Math. Oper. Res., 1982(7): 476-478

[14] Lucas W F. Applications of cooperative games to equitable allocation. Game Theory and its Application, Rhode Island, 1981

[15] Owen G. The core of the linear production games. Math. Programming, 1975(9): 358-370

[16] Owen G. Game Theory, Second edition. Academic Press, 1982

[17] Raanan J. The value of the non-atomic game arising from a rate-setting application and related problems. Ph. D thesis, School of OR&IE, Cornell University, 1978

[18] Shapley L S, Shubik M. On markets games. J. Econ. Theory, 1969 (1): 9-25

[19] Shapley L S, Scarf H. On cores and indivisibility. J. Math. Econ. 1974(1): 27-37

[20] Shubik M. Game theory models and methods in political economy.

Handbook of Mathematical Economics. K. J. Arrow and M. D. Intriligator eds., Vol 1. Amsterdam: North-Holland, 1982
[21] Shubik M. Game Theory in Social Sciences. The MIT Press, 1983
[22] Szep J, Forgo F. Introduction to the Theory of Games. Boston: D. Reidel Publishing Company, 1985
[23] Thomas L C. Games, Theory and Application, New York: Halsted press, 1984
[24] Quinzii M. Core and competitive equilibria with indivisibilities. Intern. J. Game Theory, 1984(13): 41-60
[25] Varian H R. Microeconomic Analysis. W. W. Norton and Company Inc., 1987
[26] 刘德铭,李登峰.两类价格的经济,经济数学,1991(8):9—15

第十一章　对策论在军事上的应用

§1　引言和例子

对策论讨论的模型都带有矛盾、冲突、对抗，以及谈判、妥协、合作等因素。这些因素在军事冲突或对峙中都会存在，因而从理论上讲，对策理论是非常适合于分析军事冲突诸问题的。在前面有关章节中已经举出过例子。人们确实尝试过构造有关模型用于分析某些军事冲突，甚至有一些课题原来就有军事应用的背景，如微分对策、搜索对策等。

本节再列举一些例子，说明对策理论各个课题（或分枝）在军事中可能的应用。

例 1　兵力分配问题　许多文献中称它为 Blotto 上校对策 (Colonel Blotto game)，设红、蓝两军各有指挥官统帅相当数量的军队，他在为争夺某地区的几个阵地而布署必要的兵力。为具体起见，不妨设共有两个阵地 A,B，红军有四个营的兵力，蓝军有三个营的兵力，再假设双方的军队战斗素质相当，因此只有兵力比对方强大时才能把对方打败，再假设指挥官只能按军队建制成营地调动或分配兵力，此时红方指挥官共有五种分配兵力的方案。若设 x 表示用于争夺阵地 A 的兵力数（单位：营），y 为他用于争夺阵地 B 的兵力数，那么 $\{x,y\}$ 便可表示红方指挥官的一种兵力分配策略，因而红方的五种策略（即方案）便是：$\{4,0\}$，$\{0,4\}$，$\{3,1\}$，$\{1,3\}$，$\{2,2\}$。类似地，蓝方指挥官有四个策略，即 $\{3,0\}$，$\{0,3\}$，$\{2,1\}$，

{1,2}，括号内第一个数字是用于争夺阵地 A 的兵力（单位：营），第二个数字是争夺阵地 B 的兵力。

采用零和矩阵对策模型，其支付矩阵（以红方为标准）如下：

红军 \ 蓝军	[3,0]	[0,3]	[2,1]	[1,2]
[4,0]	4	0	2	1
[0,4]	0	4	1	2
[3,1]	1	−1	3	0
[1,3]	−1	1	0	3
[2,2]	−2	−2	2	2

支付矩阵中的元素代表战斗效果评分，这里设消灭对方一营记 1 分，占领阵地一个记 1 分，双方得失相当记 0 分，一方得分另一方便失分，这是一个矩阵对策，（解略）。

较一般的问题是红蓝双方争夺 n 个阵地，双方兵力分别是 R 与 B 个战斗单位等。

例 2 攻击点选择顺序　设红、蓝两军其争夺 n 块战斗要地，假设这些地区均由蓝方把守，各个地区的重要性依次给予评分为 $a_1>a_2>\cdots>a_n>0$，红方准备攻打其中一些阵地，从集中优势兵力的原则，将会选择其中某一两块或几块地区作为攻击目标，而防守方也可集中兵力防守某些重点地区。于是存在一个选择重要的攻击（防守）顺序并布署兵力的问题，设若红方攻打第 i 块地区而蓝方并未防守（或蓝方基本上未加防守），该地区较完整的落入红方手中，当然该地区重要性评分仍为 a_i，若红军攻打第 j 块地区却遭受蓝方的抵抗，目标设施受到破坏而使重要性评分受到影响，评分设为 p_ja_j，$0\leqslant p_i<1$，于是双方间的战斗支付矩阵（以红方为标准）如下：

蓝　方

$$
\text{红方}\begin{bmatrix} p_1a_1 & a_1 & \cdots\cdots & a_1 \\ a_2 & p_2a_2 & \cdots\cdots & a_2 \\ a_3 & a_3 & \cdots\cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & & p_na_n \end{bmatrix}
$$

如果红方是选择前 r 个地区，则其优策略可能是：$x^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_r^0,0,0,\cdots,0)$相应的可设想蓝方的策略 y^0. 这里 x_k^0 表示红方攻打第 k 块地区的概率。我们既要确定 x^0,y^0，也要确定 r.

例 3　真伪识别　在战场上许多目标经常采用伪装，有时还故意布置一些假目标，有时甚至伪装成敌人。因此有一个识别真伪、区分敌我的问题。设想在某战场上空进行高空侦察发现一些目标，对它们进行识别并假设相应的效用评价为：

a：若识别为真，实际也确为真；

b：若识别为真，实际却是假；

c：若识别为假，实际也确为假；

d：若识别为假，实际却为真；

并设以上各值中 $a>b,d,c>b,d$. 不妨再假设对方在设置真假目标或进行伪装时，真目标的概率为 p.

当红方进行侦察蓝方阵地并分析所得情报时，他可以有四种处理方式；不妨把它们看作是策略，这四种方式分别是 I_1{真，假}={真，假}，I_2{真，假}={假，假}，I_3{真，假}={假，真}，I_4{真，假}={真，真}。其含义可举例说明如下：I_2 表明红方看到真目标时认为是假的，看到假目标时也识为是假的。蓝方当然有两种策略，一种是不加伪装以真的目标出现，记作“真”，另一种是布置了假目标，但外形和真的一样，记为“假”，于是对于每个重要目标，可给出如下支付矩阵。

$$\begin{array}{c} \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{array}\begin{array}{c} \text{真} \qquad\qquad\qquad \text{假} \\ \begin{bmatrix} pa+(1-p)c & pa+(1-p)d \\ pb+(1-p)c & pb+(1-b)c \\ pb+(1-p)d & pb+(1-p)c \\ pa+(1-p)d & pa+(1-p)d \end{bmatrix} \end{array}$$

然而由于设 $a>b,d,c>b,d$，所以显然 I_1 优越于 I_4，I_2 优越于 I_3，所以实际上 I_3,I_4 可以删去，从而得到

$$\begin{pmatrix} pa+(1-p)c & pa+(1-p)d \\ pb+(1-p)c & pb+(1-p)c \end{pmatrix}$$

并在此基础上再进一步分析并估计蓝方阵地上真目标的概率，然而蓝军在战地上真假目标的分布未必是"均匀"的，许多地区可能都是真的，而有的地方为引诱红军却布置了许多外形为真的假目标，真假目标在阵地上或连片的分布，或混杂分布。在某阵地上蓝方故意把真的加以伪装，同时也把假目标伪装成真目标混在其中，而在另一块阵地上一切真假目标都以真的外表出现，这样一来支付矩阵应加以重写。

也可用多阶段对策或重复对策加以分析，如红方在侦察与处理有关信息之后进行某种带检验性质的攻击，在检验的基础上再进行侦察与识别。

例 4 多兵种或多种武器协同作战 随着军事技术的日益发展，多种武器或多军（兵）种之间协同作战日益增强，它可用下面的微分对策模型加以描述。设红蓝两军，红方有 m_1 种武器，在 t 时刻（由交战开始时刻算起）第 i 种武器数量为 $x_i(t)$，$1\leqslant i\leqslant m_1$，蓝方有 m_2 种武器，在 t 时刻其第 j 种武器数量为 $y_i(t)$，$1\leqslant j\leqslant m_2$. 再设蓝方第 j 种武器在交战时对红方第 i 种武器的毁伤系数为 p_{ij}，蓝方用第 j 种武器对红方第 i 种武器进行攻击时为其全部第 j 种武器的比例为 ψ_j，类似地可解释 q_{ij},φ_j，其中 $0\leqslant\phi_j,\varphi_j\leqslant 1$，此外红方第 i 种武器初始数量为 a_i，$1\leqslant i\leqslant m_1$，蓝方第 j 种武器初始数量为 β_j，1

$\leqslant j \leqslant m_2$，于是可建立交战过程中双方武器毁伤的 Lamchester 方程如下：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt}=a_i-\sum\limits_{j=1}^{m_2} p_{ij}y_j\psi_j, & 1\leqslant i\leqslant m_1 \\ \dfrac{dy_i}{dt}=b_i-\sum\limits_{j=1}^{m_1} q_{ij}x_j\varphi_j, & 1\leqslant i\leqslant m_2 \\ x_i(t_0)=\alpha_i, 1\leqslant i\leqslant m_1 \\ y_i(t_0)=\beta_i, 1\leqslant i\leqslant m_2 \end{cases} \tag{11.1.1}$$

这里 a_i，b_i 是正常数，它们是双方第 i 种武器的增援数量。设交战时期为$[t_0,T]$，交战的效益以最大的杀伤敌人和尽可能保存自己为目标，交战完毕，计算彼此毁伤时，若以蓝方为准，可给出支付为：

$$P(\psi,\varphi)=\int_{t_0}^{T}\left[\sum_{i=1}^{m_2} r_i(1-\psi_i)y_i-\sum_{i=1}^{m_1} s_i(1-\varphi_i)x_i\right]dt \tag{11.1.2}$$

这里 $\psi=(\psi_1,\cdots,\psi_{m_2})$，$\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_{m_1})$，它们分别是蓝、红两方的控制变量，$r_i$ 为蓝方未参战的第 i 种武器的生存概率，s_i 为红方未参战的第 i 种武器的生存概率，设 r_i，s_i 均为正常数。上述微分方程组及“支付”就构成一个微分对策问题，蓝方欲 $P(\psi,\varphi)\to\max$，而红方却希望 $P(\psi,\varphi)\to\min$.

例 5　结盟问题　在三国时代，魏蜀吴三国之间不断争斗，但在诸葛亮初见刘备并为其画策时便提出联吴拒曹的战略方针，后来的历史也确实按这种战略设想发展的，从理论上看它是一个三局中人的对策问题。三个国家的国情、实力各不相同：曹魏占据古代中国北方的半壁河山，并且以汉献帝（虽然后来被废黜）的名义号令诸侯，但因北方连年征战，人民流离失所，需要适当休养生息，故在赤壁之战后曹操很少向南用兵。孙吴占据南中国的东部，北有长江天堑，西与蜀汉接壤之地又有山岳作为屏障，故有地利优势。蜀汉以正统道义为号召，君臣团结，虽位于古中国西南一隅，但西川一带沃野千里人民安居乐业。以上即诸葛亮分析中各占天时、地

利、人和的优势。依上述分析可估计三国的综合国力之比(假设)为:曹魏 40:孙吴 32:蜀汉 28. 并不妨假设其中任何一个国家只要拥有整个“天下”实力的 70%,才能统一全国的话(或者是另一个国家实力的两倍时才可能把它灭亡),显然任何一国在当时都不能实现统一的雄心,从而形成三足鼎立之势,利用三人对策描述此事,可考虑“限额对策”:

$$[q;w_1,w_2,w_3]$$

此时三国鼎立的对策便是[70;40,32,28]。三国的决策者便会想到联合一国并试图削弱另一国,便引出一个结盟问题。

三个国家的策略是:曹魏不断挑拨吴、蜀两国争斗坐收渔利,孙吴实际也是希望蜀魏两国争斗而坐收渔利,出于政治原因,蜀汉只能北伐曹魏,因而必须联吴。这些都是出于各自的实力、历史背景与政治原因来分析的。但从数量上分析,蜀与魏联合时他们的实力在集团内部之比为 40/68(魏):28/68(蜀),或 0.588:0.412. 而当吴蜀联盟时集团内部实力之比为 32/60(吴):28/60(蜀)或 0.533:0.467. 这就是如果蜀魏联盟,蜀在集团内部只是二等国的地位,但与吴蜀联盟相比,蜀与吴实力之比远较与魏联盟要改善很多,从实力对比上讲,蜀会选择与吴联盟的。

冷战时期的美、苏及中国是另一个三人对策。

例 6　搜索问题　在战场上搜索一些隐藏的武器或敌人是常见的军事行动,如猎潜舰搜索敌潜艇等,被搜索的目标可能是潜伏不动的,但有的目标可能是运动的,因此有对静止目标搜索及对动目标搜索两类问题,这些已有专门著作加以论述。如 Ruckle, H. William Geonetric games and their applications, Pitman Advcmced Pub. Program, 1983.

由以上所列举的一些问题及模型可见对策理论能广泛应用于军事,当然军事冲突是一个十分复杂的问题。整个战场是一个十分复杂的大系统,上面诸模型(或问题)只不过是从不同侧面对战场

上某类特定问题的一种数学描述，显然不能把它作为真实战场的写照，但由于这类模型提供的思想以及分析结果，有时还是有重要参照意义的，因此把它作为指挥员分析战场态势的补充辅助手段，仍是十分有意义的。

下面集中讨论两个问题。

§2 战术空战对策

红蓝两军的空战可以用双方都可以多次行动的对策加以描述。在建立有关模型之前，先简述一下有关的问题，空军可以执行各种任务，但一般可分为以下三类：(1)空袭，即针对敌方的战斗目标如机场、要塞、桥梁。重要企业等进行轰炸；(2)空防，即阻止对方机群进行空袭；(3)地面支援，主要配合自己一方地面部队的军事行动而进行的战斗任务。红、蓝两支空军都应考虑上述三项任务。

不妨假设在交战开始时刻蓝方拥有 p 架作战飞机，红方拥有 q 架作战飞机。先分析第一次空战的情形，设在第一次交战中蓝方派遣 x 架飞机对红方进行空袭，而用 u 架飞机执行防空任务，剩下的 $p-x-u$ 架飞机便用于对地面部队的支援；类似地，红方的兵力分配为：y 架用于空袭、w 架用于空防，$q-y-w$ 架用于地面支援。当然在第一次交战时双方对于飞机执行任务的分配都是极重要的机密，不会使对方知晓，但可假设双方初始拥有的飞机数 p 和 q 却是为双方了解的。

由于红方以 w 架用于空防，每架飞机作战时都可能使敌机毁伤，设毁伤系数为 c，故蓝方飞机进行空袭时将损失 cw 架，能突破红方空防线达到目标上空的只有 x-cw 架，如果 $cw>x$，蓝方不可能突破红方的空防区，故蓝方能突破红方空防区的飞机架数为 $\max(0,x-cw)$，当蓝方确有飞机抵达红方阵地（例如红方机场）

上空并进行轰炸，因而对红方（在机场上）的飞机毁伤数为 $b\max(0,x-cw)$，这里 b 是每架蓝方飞机能击毁红方飞机的毁伤系数，这里均设 c，b 为常数。

如果在第一次交战期间红方又增加了 s 架（即有 s 架已修复，可重新作战），若红方在作战时使用了 q 架，但其在交战中可能有 aq 架飞机仍生存，则此时共有 $aq+s$ 架飞机在蓝方飞机攻击之下仍存在危险。于是推知红方剩下的飞机数为：

$$\begin{aligned}&\max\{0,aq+s-\min[s+aq,b\max(0,x-cw)]\}\\&=\max\{0,\max[0,aq+s-b\max(0,x-cw)]\}\\&=\max\{0,aq+s-b\max(0,x-cw)]\end{aligned}$$

用类似的方法可知在第一次交战后蓝方剩下的飞机数为 $\max\{0,dp+r-e\max(0,y-fu)]$，其中 d,r,e,f 与 a,s,b,c 的含义相仿。

若在此次战役中双方空军的军事活动的目的是加强对地面部队的支援，那么应该对比双方关于支援地面的空中力量。以蓝方为准，他应计算双方地面支援力量之差，即 $(p-x-u)-(q-y-w)$。当然在一次战役中，双方可能多次交战（例如 N 次），地面支援的力量的比较也是多次的，所以把历次上述力量之差相加，写成 $M=\sum[(p-x-u)-(q-y-w)]$，并把它作为"支付"。

现在设双方空军在交战中主要是两项任务：空袭与地面支援（这里略去空防）。即假设 c 及 f 均为零。于是在经过第一次交战之后双方剩下的飞机数为：

$$\begin{cases}q_1=\max(0,aq-bx+s)\\p_1=\max(0,dp-ey+r)\end{cases}\tag{11.2.1}$$

而支付变作 $M=\sum[(p-x)-(q-y)]$。

由于每次交战时关于飞机执行任务时的力量分配是在上次交战的结果基础上进行的，但为方便计采取如下记号：即若在整个战役中双方空中交战共 n 次，便用 n 来标记此对策，也即设交战时初始飞机架数分别为 p_n 与 q_n，并设双方用于空袭的飞机数分别为 x_n

$\leqslant p_n, y_n \leqslant q_n$，在作了这样一次交战之后，便剩下 $n-1$ 次交战，所以

$$\begin{cases} p_{n-1} = \max(0, dp_n - ey_n + r_n) \\ q_{n-1} = \max(0, aq_n - bx_n + S_n) \end{cases} \quad (11.2.2)$$

这里 p_{n-1}, q_{n-1} 分别为蓝、红两方在具有 $n-1$ 次交战初期所拥有的飞机架数，以此类推。故在整个具有 N 次空中交战的战役中，支付(以蓝方为准)为：

$$M = \sum_{n=1}^{N} [(p_n - x_n) - (q_n - y_n)] \quad (11.2.3)$$

若再用 $v_k(p_k, q_k)$ 记具有 k 次交战时的对策的值，p_k, q_k 分别为蓝、红两军在交战开始时刻所拥有的飞机架数。这里假设在剩下的 $n-1$ 次交战中双方均采取优策略时对策有值 v_{n-1} 的前提下，在第一次采取合适的 x_n, y_n 的分配，所以具有 n 次交战的对策的支付可写作：

$$M_n(x_n, y_n) = p_n - x_n - (q_n - y_n) + v_{n-1}(p_{n-1}, q_{n-1}) \quad (11.2.4)$$

下面讨论在具此两项任务时双方的优策略，显然在进行一个具 n 次交战的对策解算时，便要进行一个具有 $n-1$ 次交战对策的解算，依此类推。所以我们先讨论只有一次交战的对策，求其优策略，在此基础上由(11.2.4)讨论具有二次交战的对策，这样顺次讨论，可得具 n 次交战对策的解。

设 $v_0(p_0, q_0) = 0$，于是由(11.2.4)，具一次交战的对策有支付为：$M_1(x_1, y_1) = p_1 - x_1 - q_1 + y_1$，显然，当 $x_1 = x_1^* = 0$ 及 $y_1 = y_1^* = 0$ 时对策取最优值，即蓝、红两方都不进行空袭而把所有的飞机都用于地面支援。所用飞机分别为 p_1、q_1 架，因而在具一次交战的对策中对策值为 $v_1(p_1, q_1) = p_1 - q_1$. 在此基础上再讨论具两次交战的对策，此时由(11.2.4)，$M_2(x_2, y_2) = p_2 - x_2 - q_2 + y_2 + v_1(p_1, q_1) = p_2 - x_2 - q_2 + y_2 + p_1 - q_1$. 而由(11.2.2)，$p_1 = \max(0, dp_2 - ey_2 + r_2)$，$q_1 = \max(o, aq_2 - bx_2 + s_2)$，代入 $M_2(x_2, y_2)$ 中可得：

$$M_2(x_2,y_2)$$

$$=\begin{cases} p_2-q_2-x_2+y_2, & x_2\geqslant\dfrac{aq_2+s_2}{b},y_2\geqslant\dfrac{dp_2+r_2}{e} \\ (1+d)p_2-q_2-x_2+ \\ \quad y_2(1-e)+r_2, & x_2\geqslant\dfrac{aq_2+s_2}{b},y_2\leqslant\dfrac{dp_2+r_2}{e} \\ (1+d)p_2-(1+a)q_2-(1-b)x_2 \\ \quad +(1-e)y_2+r_2-s_2, & x_2\leqslant\dfrac{aq_2+s_2}{b},y_2\leqslant\dfrac{dp_2+r_2}{e} \\ p_2-(1+a)q_2 \\ \quad -(1-b)x_2+y_2-s_2, & x_2\leqslant\dfrac{aq_2+s_2}{b},y\geqslant\dfrac{dp_2+r_2}{e} \end{cases} \qquad (11.2.5)$$

虽然以此 $M_2(x_2,y_2)$ 为支付的对策值应依赖于参数 a,b,d,e. 先设 $b>1,e>1$，可求得：

$$x_2^*=\frac{aq_2+s_2}{b},\quad y_2^*=\frac{dp_2+r_2}{e}$$

而对策值 v_2 为：

$$v_2=(1+\frac{d}{e})p_2-(1+\frac{a}{b})q_2+\frac{r_2}{e}-\frac{s_2}{b}$$

而若 $b<1,e<1$，则优策略为 $x_2^*=0,y_2^*=0$，此时的对策值为：

$$v_2=(1+d)p_2-(1+a)q_2+r_2-s_2$$

在计算了 $n=1,n=2$ 的情况后，可计算 $n=3$ 的情况，此时 $M_3(x_3,y_3)=p_3-x_3-q_3+y_3+v_3(p_2,q_2)$，并用(11.2.2)表示 p_2,q_2，代入 $M_3(x_3,y_3)$ 中求解优策略及对策值。

按以上描述过程，如果红方有足够的力量使用 $y_n=(dp_n+r_n)/e$ 进行空袭便能消灭蓝方的力量，那么任何超过这个量的力量分配便是“浪费”，所以红方应取：

$$y_n=\min(q_n,\frac{dp_n+r_n}{e})$$

类似地，关于蓝方有

$$x_n=\min(p_n,\frac{aq_n+S_n}{b})$$

以上这种分配方式均用记号 A 表示。

若蓝方用于空袭的力量 x_n 为 0，而把全部力量集中使用于地面支援，这种战术分配方式记作 G，同样，即对于红方的类似行动：$y_n=0$，也记作 G. A 与 G 是两种特殊情况，如果既非 A 又非 G 而是两种行动均有，则记作 (A,G)。

最优策略显然依赖于毁伤参数，我们先设 $a+b\geqslant 1$ 及 $d+e\geqslant 1$，于是便可转而讨论双方需要在战役一开始使用一系列的 A 种分配战术，而在战役将结束时使用一系列 G 种分配战术，而由 A 转向 G 的转折点一般说来红、蓝两方是不同的，这种转折点确切的估计应依赖于毁伤参数的大小，它们可用下面方法确定。设 f 是使不等式 $\frac{1}{e}-\frac{1-d^f}{1-d}>0$ 成立的最大整数，而 g 是使不等式 $\frac{1}{b}-\frac{1-a^g}{1-a}\geqslant 0$ 成立的最大整数，整数 f 和 g 可确定在哪一次交战中进行由 A 到 G 的转换。上述方法所得的优策略将列在下面的表中，其中 t 表示在情形 2 与 3 中的另一个转换点。

两项任务间最优力量分配表

情况编号	参数范围	局中人	在交战次数为 n 时的最优分配(由战役终止的次数计算)			
			$1\leqslant n\leqslant \min(f+1,g+1)$	$\min(f+2,g+2)\leqslant n\leqslant t$	$n=t+1$	$t+2\leqslant n\leqslant N$
1	$a+b\geqslant 1, d+e>1$	蓝	G	G	A	A
	$f<g$	红	G	A	A	A
	$g<f$	蓝	G	A	A	A
		红	G	G	A	A
	$g=f$	蓝	G	A	A	A
		红	G	A	A	A
2	$a+b\leqslant 1$, $d+e\geqslant 1$	蓝	G	G	A	(A,G)
	$(g=\infty)$	红	G	A	A	A

（续上表）

3	$a+b\leqslant 1$, $d+e\leqslant 1$	蓝	G	A	A	A
	$(f=\infty)$	红	G	G	A	(A,G)
4	$a+b\leqslant 1$, $d+e\leqslant 1$	蓝	G	G	G	G
	$(f=g=\infty)$	红	G	G	G	G

我们再来讨论担负三项任务时的兵力的战术分配。此时双方都考虑同时执行三项作战任务——空袭、空防与地面支援。为简单计，设红、蓝两方具有相同的空防潜力，即每架飞机若用于空防可阻止一架敌机达到目标上空，也即设 $c=f=1$，再假设每架进行攻击的飞机若能突破空防的话，可毁伤停在机场上的一架敌机，或 $b=e=1$. 而由于故障失事、偶然事故以及防空火网的射击损失现均忽略不计，故设 $a=e=1$. 最后假设没有修复后重新参战的飞机，即 $r=s=0$. 于是在交战结束时双方存留的飞机分别是：

$$\begin{cases} p_1=\max(0,p-\max(0,y-u)) \\ q_1=\max(0,q-\max(0,x-w)) \end{cases}$$

当讨论三任务模型时的最优策略时，便会发现它与两项任务的问题在以下两方面是不同的：首先，最优战术依赖于双方的相对强弱，第二，最优的行动需要一方采用混合策略，虽然寻找最优战术的方法与两项任务问题的方法相仿，但却更加复杂，所以这里略去冗长的讨论，而将结果利用列表形式给出（读者可以检验）。

并将用双方相对强弱以及剩下的打击次数进行解释。在进行描述时不妨设一方例如蓝方是更强的一方，也即 $p\geqslant q$. 但这并不意味着在开头为强者而在余下的诸阶段总是强者。当然如果局中人原来是强者而每次又都使用优策略，那么他在整个对策过程中将会保持为强者。

战役时期（战役中剩下的交战数目）	相对的原始双方强弱（强、弱双方力量比值 p/q）	强方最优原始兵力分配（力量、大小）		
		空　袭	空　防	地面支援
1	1.00 至∞	0	0	p
2	1.00 至∞	0	0	p
3	1.00 至 2.00	q	0	$p-q$
	2.00 至∞	$1.5q$	$0.5q$	$p-2q$
4	1.00 至 2.33	$0.5p+0.5q$	$0.5p-0.5q$	0
	2.33 至∞	$1.67q$	$0.67q$	$p-2.33$
5	1.00 至 1.70	$0.41p+0.59q$	$0.59p-0.59q$	0
	1.70 至 2.45	$0.55p+0.36q$	$0.45p-0.36q$	0
	2.45 至∞	$1.70q$	$0.75q$	$p-2.45$
6	1.00 至 1.44	$0.32p+0.68q$	$0.68p-0.68q$	0
	1.44 至 1.78	$0.40p+0.56q$	$0.60p-0.56q$	0
	1.78 至 2.51	$0.59p+0.22q$	$0.41p-0.22q$	0
	2.51 至∞	$1.71q$	$0.80q$	$p-2.51$
7	1.00 至 1.29	$0.25p+0.75q$	$0.75p-0.75q$	0
	1.29 至 1.53	$0.29p+0.70q$	$0.71p-0.70q$	0
	1.53 至 1.84	$0.41p+0.51q$	$0.59p-0.51q$	0
	1.84 至 2.55	$0.63p+0.11q$	$0.37p-0.11q$	0
	2.55 至∞	$1.72q$	$0.84q$	$p-2.55$
8	1.00 至 1.25	$0.20p+0.80q$	$0.80p-0.80q$	0
	1.25 至 1.40	$0.22p+0.78q$	$0.78p-0.78q$	0
	1.40 至 1.59	$0.28p+0.69q$	$0.72p-0.69q$	0
	1.59 至 1.88	$0.42p+0.46q$	$0.58p-0.46q$	0
	1.88 至 2.58	$0.66p+0.01q$	$0.34p-0.01q$	0
	2.58 至∞	$1.72q$	$0.86q$	$p-2.58$

弱方最优原始分配(集中力量于何任务的概率)			对策值
空袭	空防	地面支援	
0	0	1	$p-q$
0	0	1	$2(p-q)$
0.5	0.5	0	$3(p-q)$
0.5	0.5	0	$3(p-q)$
0.50	0.50	0	$4.5(p-q)$
0.33	0.33	0.33	$4.00p-3.33q$
0.53	0.47	0	$6.35p-6.35q$
0.45	0.55	0	$5.82p-5.45q$
0.25	0.30	0.45	$5.00p-3.45q$
0.56	0.44	0	$8.39p-8.39q$
0.52	0.48	0	$8.00p-7.83q$
0.41	0.59	0	$7.04p-6.12q$
0.20	0.29	0.51	$6.00p-3.51q$
0.58	0.42	0	$10.50p-10.50q$
0.57	0.43	0	$10.26p-10.19q$
0.50	0.50	0	$9.54p-9.09q$
0.37	0.63	0	$8.21p-6.64q$
0.17	0.28	0.55	$7.00p-3.55q$
0.60	0.40	0	$12.60p-12.60q$
0.59	0.41	0	$12.48p-12.45q$
0.56	0.44	0	$12.06p-11.86q$
0.49	0.51	0	$11.03p-10.22q$
0.34	0.66	0	$9.36p-7.07q$
0.14	0.28	0.58	$8.00p-3.58q$

下面作一些定性描述。

1. 战役结束时的地面支援。战役结束时总有一连串的地面支援——即接近战役结束时红、蓝双方都把力量集中于地面支援的战斗。在此结束阶段，双方并不考虑其力量的大小而总是采取相似的优战术。若设 $c=f=b=e=1$，则这个结束时期可由最后两次交战组成。

2. 蓝方(强的一方)把它的力量加以划分。除去双方有十分相接近的态势外，双方在整个战役时期都有不同的最优策略。在早期的任何一次交战中，强者即蓝方有一个纯策略，即存在蓝方关于它的三项任务之最优力量分配。在这方面有一个关于蓝方力量与红方力量对比的比值临界值(大约为 2.7)，它可由以下的方式在最初阶段确定蓝方的力量分配：若力量比值小于上述临界值，那么在早期的交战中的最优分配，强方的力量由执行两项任务的力量组成，即空袭与空防而略去地面支援。力量分配的大小依赖于双方的相对力量的强弱与在战役中尚需进行空中交战的次数，然而如果蓝、红两方力量之比大于此临界值，则蓝方可按固定方式把其力量分配于三项任务：空袭、空防与地面支援，在每次战斗中飞机数目的分配仍然依赖于剩下的双方交战次数。

3. 红方(弱的一方)将采取混合战术策略并集中他自己的力量。弱者在战斗时不可能使用一个策略，它必须在未结束战役时的各个态势中使用欺骗与恐吓手段，不象他的对手，弱者在战斗时并不存在执行单一任务的最佳战术，他必须使用混合策略，并以较高支付作为“赌注”，如果他并不太弱，即若力量对比值小于临界值，那么它将把自己的力量集中起来或用于空袭，或用于空防，但哪种任务最为有效却需作出决断(有一定机遇)。但若红方相当弱(力量比大于临界值)，则它将其全部空军力量用随机的方式投入到三项任务之一，换言之若其力量与对手相比相当弱，它将在早期寻求机会使作战更有效，它应作出正确决断，以随机方式选取实际上相对

频繁的任务。

4. 混合并分配力量。注意在每次交战中红方(即弱者)必须对蓝方的分配(在同一作战任务)作出决断，所以当红方相当弱时他必须在此三项任务中作出决断，然而若红方只是适度的弱(略弱一点)，它可在两项任务——空袭或空防中作出决断，并且蓝方也应把自己的力量在这相同的两项任务中作出分配。

5. 在战役期间蓝方的空防将逐步减少。由上可以预见战役中的态势，蓝方可将其力量在诸作战任务中分配力量，而实际的分配是依赖于红、蓝双方的力量大小以及在战役中剩下的战斗次数。然而随着战役的推进，蓝方力量用于空防的比例将减少，而用于空袭的力量将增加，而在此同时期红方攻击蓝方的机会也会减少，但红方进行空防的机会将增多。

6. 在一个长时期的战役中蓝方的空防情况，在相对较长的战役中的早期阶段，强方的空防是针对弱方的集中力量的攻击行动，在此时期蓝方可派遣一支飞机架数多寡与红方的整个力量相接近的力量用于空防，因为用这样大小的力量防御是最有效的。

上表中概括的给出在战役中最多有 8 次空中交战时诸优战术策略的组合。表中给出每次交战的最优力量分配，表的最后一列给出了对策值。

§3 元对策与冲突分析

在有多方参与的大型(军事)冲突中，各方由于其(军事)地位、实力、追求的目标(利益)都不相同，所以描述这些问题的模型一般都是非零和非合作的对策。经典的方法可能从求出它的 Nash 平衡点开始，但是这种平衡点却未必就是冲突各方所追求或愿意接受的，以囚徒两难问题来说(第一章 §1 例 2)，双方都坦白是他们

的较好策略，但实际上两名囚徒可能都选取不认罪的策略，所以理论与实际并不是一致的，这里应考虑局中人本身的愿望或偏好(Preference)，以及在此基础上局中人对其对手行为的预测，并在预测基础上采取反应的策略。对于激烈对抗的冲突，局中人常常根据对方的行动作出针对性极强的反应性对抗策略。双方都会预测对方的行动，并调整自己的策略，几经调整可能达到一种稳定状态，基于这种设想，Nigel Howard 于 1966 年提出一种新的对策模型——元对策(Metagame)，此类对策还有超对策(Hypergame)。由于讨论时涉及局中人的偏好并以此为基础进行判断，故策略的好坏也应以此为准，故对于支付中具体数值的(微小)差异并不是重要的。

下面给出有关定义及记号。这里定义以 n 人对策形式给出，考虑对策 $\Gamma=\langle N,\{S^i\}_{i\in N},\{P_i\}_{i\in N}\rangle$，其中 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，S^i，P_i 分别为局中人 i 的策略集及支付，$i\in N$，若有策略组 $(s_1^*,s_2^*,\cdots,s_n^*)$ 使对一切 $s_i\in s^i$，都有 $P_i(s_1^*,\cdots,s_i^*,\cdots,s_n^*)\geqslant P_i(s_1^*,\cdots,s_i,\cdots,s_n^*)$ 成立(与前面各章一样，一般设局中人均追求使自己的支付→max，则称此策略组 $(s_1^*,\cdots,s_n^*)$ 为局中人 i 的合理结果，i 的所有合理结果构成的集称为 i 的合理结果集，记作 $R_i(\Gamma)$。局中人便是依他们各自的合理结果集为基础来寻求平衡点的。

定义 11.3.1 对策 Γ 的平衡点为满足以下关系的集合 $E(\Gamma)$ 中的一个元素；其中

$$E(\Gamma)=\bigcap_{i=1}^{n}R_i(\Gamma) \tag{11.3.1}$$

并称 $E(\Gamma)$ 为平衡点集。

现在按前述想法进行讨论。在基本对策 Γ 中，若除局中人 1 外所有的其他局中人都在 Γ 中选取各自的策略，然后局中人 1 再根据其他人的选择作出自己的选择。这样的对策记作 1Γ，局中人 1 在 1Γ 中选择其合理结果，其合理结果集记作 $R_1(\Gamma)$，其他局中

人也可在 1Γ 中求其合理结果集 $R_k(1\Gamma), k\in N$. 类似地可定义对策 $i\Gamma$ 及 $R_k(i\Gamma)$，其中 $i, k\in N$. 然后求出 $E(i\Gamma)=\bigcap_{k=1}^{n} R_k(i\Gamma)$，并比较诸 $E(i\Gamma), i\in N$.

依照上面思路，若把 $i\Gamma$ 作为基本的，可以考虑 $ji\Gamma$，这是指在 $i\Gamma$ 中除局中人 j 以外其他人选定各自策略后，局中人 j 再据此选择自己策略的对策，一般可给出对策 $k_1k_2\cdots k_r\Gamma$，这里 r 为任何非负整数而 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 为局中人的序列，其中包括重复出现的局中人，这里每一个由 Γ 衍生出的对策 $i\Gamma, ji\Gamma, \cdots, k_1k_2, \cdots, k_r\Gamma$ 都称为以 Γ 为基础对策的元对策(Metagame)。若 Γ 的某策略组或(合理)结果$(S_1^*, \cdots, S_n^*)$是对策 $k_1k_2\cdots k_r\Gamma$ 的一个平衡点。则称它是此元对策的一个元平衡点(Metaequilibrium)，记作 $\hat{E}(k_1\cdots k_r\Gamma)$，而所有此类元平衡点的全体的集记作 $\hat{E}(\Gamma)$。

下面通过例子来说明上述概念。

例 1 1982 年，英国与阿根廷之间爆发了马尔维纳斯群岛(或福克兰群岛)之战。该群岛在战前为英国管辖，战争初期为阿占领，英国便面临一个重新夺取该群岛的任务。它可看作两人对策，此时英方有两项选择：放弃夺取与继续再次入侵，防方也有两个选择：撤离群岛与维持占领。现假设双方政府对此四种可能结果的倾向评价顺序如下表，这里设英方为局中人 1，防方为局中人 2。

		阿	
		撤离 w	维持占领 m
英	放弃 a	(4,2)	(1,4)
	入侵 c	(3,1)	(2,3)

这里 1,2,3,4 表示偏爱或倾向程度，数值愈大表示倾向程度愈大，第一个数字代表英方倾向，第二个数字代表防方倾向。由于英方坚持入侵，阿方维持占领，遂起马岛之战。下面用元对策进行分析。

不难看出在对策 Γ 中唯一平衡点为(c, m)。也即历史上的实

际结果。因为 $R_1(\Gamma)=\{(a,w),(c,m)\}$，$R_2(\Gamma)=\{(a,m),(c,m)\}$，故 $E(\Gamma)=R_1(\Gamma)\cap R_2(\Gamma)=(c,m)$。

再考察对策 1Γ，这里阿方的策略集仍为 $s^2=\{w,m\}$，但英方是在预测阿方的策略的基础上选取自己策略的，所以它的策略为阿方策略的反应函数，或说应取形状如下之集合：$F_1=\{f \mid f:S^2\rightarrow s^1\}$，这里有如下四种可能：

$f_1(w)=a$，$f_1(m)=a$，即英方在任何情况下均放弃该群岛；

$f_2(w)=c$，$f_2(m)=c$，即英方在任何情况下均继续入侵；

$f_3(w)=a$，$f_3(m)=c$，阿方撤退时英放弃而阿占领时英入侵；

$f_4(w)=c$，$f_4(m)=a$，阿撤离时英入侵而阿占领时英放弃。

上面有些结果在实际上是荒谬的，但在逻辑上应该列出。此时对策 1Γ 的支付为：

阿

		w	m
英	f_1	(4,2)	(1,4)
	f_2	(3,1)	(2,3)
	f_3	(4,2)	(2,3)
	f_4	(3,1)	(1,4)

易见 $R_1(1\Gamma)=\{(a,w),(c,m)\}$，$R_2(1\Gamma)=\{(a,m),(c,m)\}$，故 $E(1\Gamma)=(c,m)$。

仿上可建立 2Γ 的支付矩阵，并推出 $R_1(2\Gamma)=\{(a,w),(c,w),(c,m)\}$，$R_2(2\Gamma)=\{(a,m),(c,m)\}$，从而 $E(2\Gamma)=(c,m)$。

继续以上分析可考虑对策 12Γ 及对策 21Γ，例如 21Γ 中局中人 1(英)的策略集仍为 $F_1=\{f:S^2\rightarrow S^1\}$，而局中人 2(阿)的策略集现在是 $G_2=\{g:F_1\rightarrow S^2\}$，此时从逻辑上看可列出 G_2 中的 16 个情形：$g_1,\cdots,g_{16}$，从而相应的支付矩阵为 4×16。这里 g_i 是由向量形式给出，如 (m,w,m,m) 之类，其含义是 $g(f_1)=m$，$g(f_2)=w$，$g(f_3)=m$，$g(f_4)=m$ 等。由于此 4×16 矩阵比较冗长，故不列出

（读者作为练习，可自己列出），不难推出：$R_1(21\Gamma)=\{(a,w),(c,m),(c,m)\}$，$R_2(21\Gamma)=\{(a,m),(c,m)\}$，$E(12\Gamma)=(c,m)$。类似可推出 $R_1(12\Gamma)=\{(a,w),(c,w),(c,m)\}$，$R_2(12\Gamma)=\{(a,m),(c,m)\}$，$E(12\Gamma)=(c,m)$。当然分析还可以继续下去，如讨论 121Γ，212Γ 等等。最后显然可见每一个元对策均有唯一的元平衡点 (c,m)，故 $\hat{E}(\Gamma)=(c,m)$。即实际结果稳定在 (c,m)，也即双方交战。注意此时有

$$\max_{s_1}\min_{s_2}P_1(s_1,s_2)=\min_{s_2}\max_{s_1}P_1(s_1,s_2)$$

$$\min_{s_1}\max_{s_2}P_2(s_1,s_2)=\max_{s_2}\min_{s_1}P_2(s_1,s_2)$$

在上面的分析中运用此种方法时，由基本对策 Γ 所衍生的元对策的支付将愈来愈大，这显然会为我们进一步寻求有关元对策的合理结果集带来困难。我们关心的是 $\hat{E}(\Gamma)$，那么做到哪一步便能得到 $\hat{E}(\Gamma)$？

先将局中人串 $k_1k_2\cdots k_r$ 中的局中人加以划分，对于局中人 i，若在串 $k_1k_2\cdots k_r$ 中最后一次出现 i 后，它后面的那些局中人的全体的集记作 F_i（或当 i 不出现时出现在 $k_1k_2\cdots k_r$ 中的局中人的集）；在局中人串 $k_1k_2\cdots k_r$ 中既非 F_i 中的局中人且又在最后出现的 i 之前出现的诸局中人之集记作 B_i，而既不在 F_i 中又不在 B_i 中，又非 $\{i\}$ 的诸局中人的集记作 U_i，这样一来策略组（即结果）S 可写作 $S=(S_{F_i},S_{B_i},S_{U_i},S_i)$，此时有如下的结果：

定理 11.3.1 在由基本对策 Γ 衍生的元对策 $k_1k_2\cdots k_r\Gamma$ 中，对于 i，若 $\tilde{S}=(\tilde{S}_{F_i},\tilde{S}_{B_i},\tilde{S}_{U_i},\tilde{S}_i)$ 为 Γ 的一个策略组，如果

$$\min_{S_{B_i}}\max_{S_i}\min_{S_{F_i}} P_i(S_{F_i},S_{B_i},\tilde{S}_{U_i},S_i),\leqslant P_i(\tilde{S}) \qquad (11.3.2)$$

成立，则 $\tilde{S}$ 为 i 在 $k_1k_2\cdots k_r\Gamma$ 中的一个元合理结果（策略）。

该定理的证明比较冗长但并不困难，主要依赖于偏爱关系（$\succsim$）的传递性以及选择原理（公理）等知识，从略。但当局中人限

于两人时，由于叙述较方便，故在下面给出必要的解释。此时设对策为 Γ，对局中人 1（甲），若

$$\max_{s_1} P_1(s_1,\bar{s}_2) \leqslant P_1(\bar{s}_1,\bar{s}_2) \tag{11.3.3}$$

则 $(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ 是他在 1Γ 中的一个元合理策略组。这是由于 $F_1=B_1=\varnothing$，$U_1=\{2\}$ 之故。而对于局中人 2，由于 $F_2=\{1\}$，$B_2=U_2=\varnothing$，所以当 $\max_{s_2}\min_{s_1} P_2(s_1,s_2) \leqslant P_2(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ 时 $(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ 为 2 在 1Γ 的一个元合理策略组，再看 21Γ，对于局中人 1，由于 $B_1=\{2\}$，$F_1=U_1=\varnothing$，故当 $\min_{s_2}\max_{s_1} P_1(s_1,s_2) \leqslant P_1(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ 时 $(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ 为局中人 1 的一个元合理策略组，同样在 21Γ 中对局中人 2 当 $\max_{s_2}\min_{s_1} P_2(s_1,s_2) \leqslant P_2(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ 时 $(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ 为 2 的元合理策略组。类似地可讨论在对策 2Γ，对策 12Γ 中局中人 1，2 的合理策略组的条件，这些条件分别是：在 2Γ 中，对于 1，当 $\max_{s_1}\min_{s_2} P_1(s_1,s_2) \leqslant P_1(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ 时 $(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ 为 1 的合理策略组，对于 2，当 $\max_{s_2} P_2(\bar{s}_1,s_2) \leqslant P_2(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ 时 $(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ 为 2 的合理策略组，在对策 12Γ 中，对于 1，当 $\max_{s_1}\min_{s_2} P_1(s_1,s_2) \leqslant P_1(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ 时 $(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ 为 1 的合理策略组，对于 2，当 $\min_{s_1}\max_{s_2} P_2(s_1,s_2) \leqslant P_2(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ 时 $(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$ 为 2 的合理策略组。

读者可用英阿马岛之战的例子来检验以上条件。

定理 11.3.1 有一个重要推论，它使我们应用于二人对策时感到十分方便。

推论 给定元对策 $k_1k_2\cdots k_r\Gamma$，在局中人串 $k_1k_2\cdots k_r$ 中除去最后的（即最靠近 Γ 的）局中人外，从串中删去任何一个（或若干个）重复出现的局中人而得结果元对策设为 $k_1'k_2'\cdots k_r'\Gamma$，则此元对策与原来的元对策有相同的元合理策略组。

证 只要注意在此两个元对策中，集 F_i,B_i 及 V_i 均为相同的集，故由定理 11.3.1 立即得到结果。

依此推论，可推知 121Γ,1212121Γ 与对策 21Γ 有相同的元合理策略组，而 2222Γ 与 2Γ 有相同的元合理策略组，如此一来对于二人对策只须考察如下四个元对策，即 1Γ,2Γ,21Γ,12Γ，对于 n 人对策，当然需要考虑 $n!$ 个上述可能的对策，这些对策对应着局中人串中由 1 到 n 的 $n!$ 种排列，然而从应用来讲 $n=2,3$ 居多。由此推论可知关于马岛之战，分析 1Γ,2Γ,12Γ,21Γ 便已足够。

例1 古巴导弹危机。1962 年，美国政府声称发现苏联在古巴布署导弹，因此声称要准备入侵古巴以迫使苏联撤走导弹。当时美国可以采取两种行动，放弃入侵或准备入侵，而苏联也有两种策略，即撤走其导弹或维持原状，对此，依双方对各策略的倾向程序排序，给出以下支付矩阵：

		苏联 撤走(w)	苏联 维持(m)
美国	放弃(a)	(3,3)	(2,4)
美国	继续入侵(c)	(4,2)	(1,1)

采用上面分析方法可见原来对策有平衡点为(c,m)及(a,m)，这分别表示苏联胜利与美国胜利两种结果，然而历史上的结果却是(a,w)，即美国放弃入侵同时苏联撤走导弹，而在寻找上述对策的稳定结果时也提供过此种可能，不难求出：

$R_1(1\Gamma)=\{(c,w),(a,m)\}$，$R_2(1\Gamma)=\{(a,w),(c,w),(a,m)\}$

$R_1(2\Gamma)=\{(a,w),(c,w),(a,m)\}$，$R_2(2\Gamma)=\{(a,m),(c,w)\}$

$R_1(12\Gamma)=\{(a,w),(c,w),(a,m)\}$，$R_2(12\Gamma)=\{(a,w),(c,w),(a,m)\}$

$R_1(21\Gamma)=\{(a,w),(c,w),(a,m)\}$，$R_2(21\Gamma)=\{(a,w),(c,w),(a,m)\}$

由于$\max\limits_{s_1}\min\limits_{s_2}P_1(s_1,s_2)=\min\limits_{s_2}\max\limits_{s_1}P_1(s_1,s_2)=2$，及$\max\limits_{s_2}\min\limits_{s_1}P_2(s_1,s_2)=\min\limits_{s_1}\max\limits_{s_2}P_2(s_1,s_2)=2$，且易知$E(1\Gamma)=E(2\Gamma)=\{(c,w),(a,m)\}$，$E(12\Gamma)=E(21\Gamma)=\{(a,w),(c,w),(a,m)\}$。可见$(a,w)$也是$12\Gamma$及$21\Gamma$的一个元合理结果，$(c,w)$，$(a,m)$都表明其中一方要失去面子，所以必为一方所拒绝，最后双方都接受了(a,w)。

回顾上面两个例个，可看出若有策略组是Γ的元合理结果，它也是$1\Gamma,2\Gamma,12\Gamma,21\Gamma$的元合理结果，并且若有一个策略组是$1\Gamma$的元合理组，它也是$21\Gamma$的元合理组。若把由某个基本对策衍生出的诸元对策称为它的高阶元对策，则可猜想“一个对策的元合理结果也必为以它为基础的高阶元对策的元合理结果”。事实上有：

定理 11.3.2 若$\bar{s}=(\bar{s}_1,\bar{s}_2,\cdots,\bar{s}_n)$为局中人$i$在对策$k_2k_3\cdots k_r\Gamma$中的一个元合理结果，则它也是$i$在对策$k_1k_2\cdots k_r\Gamma$中的元合理结果，这里不论$k_1$是何局中人。

证 由定理 11.3.2，以i为准，可将局中人集划分为F_i,B_i及U_i。由假设$\bar{S}$为$k_2k_3\cdots k_r\Gamma$中的元合理结果，于是由(11.3.2)可得：

$$\min_{S_{B_i}}\max_{S_i}\min_{S_{F_i}}P_i(S_{F_i},S_{B_i},\bar{S}_{U_i},S_i)\leqslant P_i(\bar{s})$$

再加上局中人k_1之后形成局中人串$k_1k_2k_3\cdots k_r$，若k_1不是$\{i\}$且已在原局中人串$k_2k_3\cdots k_r$中出现过，那么由本节定理 1 的推论，$\bar{S}$仍然为新元对策的元合理结果，否则，若新局中人k_1为$\{i\}$，则由F_i的定义，$k_2k_3\cdots k_r$仍在F_i中，所以上面不会有任何变化，从而(11.3.2)是$\bar{S}$在$k_1k_2\cdots k_r\Gamma$中为元合理结果的条件(注意$\bar{S}$已是$k_2k_3\cdots k_r\Gamma$的元合理结果)。最后若k_1在原来元对策的v_i集中，则在$k_1k_2\cdots k_r\Gamma$中它便进入B_i集中，并且由于：

$$\min_{S_{K_i}}\min_{S_{B_i}}\max_{S_i}\min_{S_{F_i}} P_i(S_{F_i}, S_{B_i}, S_{K_i}, \tilde{S}_{U_i}, S_i)$$

$$\leqslant \min_{S_{B_i}}\max_{S_i}\min_{S_{F_i}} P_i(S_{F_i}, S_{B_i}, S_{K_i}, \tilde{S}_{U_i}, S_i)$$

由于 $\tilde{S}$ 满足(11.3.2)，当然它也满足 i 在 $k_1k_2\cdots k_r\Gamma$ 中的相应条件，即 $\tilde{S}$ 为 $k_1k_2\cdots k_r\Gamma$ 中局中人 i 的元合理结果。证毕。

此定理说明对于 n 人对策，我们只须注意讨论元对策 $123\cdots n\Gamma$ 或 $n(n-1)\cdots 21\Gamma$，或者此 n 个局中人关于 $1,2,\cdots,n$ 的任何排列的局中人串的情形。由此求出元平衡组，而由 n 个局中人作出排列而构成的诸局中人串 $k_1k_2\cdots k_n$ 对应的元对策 $k_1k_2\cdots k_n\Gamma$，统称为完全对策(Complete game)。若一个结果 $(s_1^*, s_2^*, \cdots, s_n^*)$ 在一切完全对策中均为元平衡组，则称此结果为一个对称元平衡(Symmetric metaequilibrium)。

显见前两例中元平衡组(即含在 $\hat{E}(12\Gamma)\cap\hat{E}(21\Gamma)$ 中的)都是对称的。当然元平衡组并不一定都是对称元平衡。

我们来看看实际应用过程中如何使用元对策理论。作为一支军队的指挥员或他的主要参谋人员，你或你的上司会对哪些问题更感兴趣？当然，可以把所有元对策中元合理结果列出来。但在交战过程或筹画阶段，也许指挥员对于可能提出的一些基本方案，以及在战场上不断变化的战斗态势中如何掌握主动、哪一些方案可能是“稳定”的等问题比较感兴趣。因此我们便必须对如何选择基本方案作出分析。这种分析的目的便是研究在(军事)冲突中分析、检验某个特殊方案或合理策略结果在元对策意义下是稳定的。由于作此类研究时必然涉及人(双方指挥员)以及当时所处的客观政治、经济、军事斗争的环境，并由于各自代表的利益，一定会对各种不同基本方案有各自的偏好(或倾向性)，所以应先了解冲突各方主要决策人(或决策集团)的倾向性，并假设他们能在任何两个方案之间建立起偏好或无差异的顺序。不过在作冲突分析时一方的

局中人当然可对自己关于各种方案的偏好与倾向性进行排序，对于其他各方的局中人关于各方案的偏好顺序也应作出一种恰当的估计，并在此基础上进行工作。

在具体进行分析时可按以下步骤进行：

1. 列出所有局中人以及所有的方案或策略，当然局中人还可能增添或变化其他方案或策略。

2. 找出可作稳定性检验的方案或策略结果（把明显不需检验的方案剔除，剩下来的应作检验），称它们为基本方案集。

3. 选取一个局中人并检验诸方案，找出对他来说为元合理的那些方案，然而再按以下步骤来讨论分析。

4. 在上述基本方案中找出关于此局中人的所有的单边改进(Unilateral improvements，简记为 UI)，它是指在其他局中人（在各个基本方案中）仍然保持原来策略不变的前提下，此局中人所更偏爱的结果（或基本方案）能通过他单方面改变自己的策略而达到。通过一系列工作，当该局中人已无任何单边改进时，便转入步骤 3，检验另一个局中人。

5. 若对某局中人存在有单方改进的同时，其他局中人若有针对他的制裁(Sanction)——它是指当改变他们的策略时，不论此局中人选择什么方案，他都应面对他不喜欢的结果（或基本方案），制裁简记作 S，假若存在制裁，把它找出来再转向步骤 3，并检验其他局中人。

6. 若此局中人有单边改进而没有针对他的制裁，我们应再检验这些单边改进是否为有保证的改进(Guaranteed improvement)，简记作(G. I.)，它是指若局中人选择某个方案并作出单边改进，而如果对于一切其他局中人对方案的选取，此局中人仍然偏爱他所选的这个基本方案的结果，换言之这种改进不受其他局中人所作选择的影响。假如任何单边改进都是 $G.I.$ 那么基本方案将不是稳定的（因为任何方案都会改变），否则，转向步骤 3，并检验

其他局中人。

7. 若已对所有的局中人进行过检验，他们中已没有任何人具有有保证的改进，则称基本方案是稳定的。

以上算法过程1—7与元对策分析密切相关。以二人对策为例，在对策 Γ 中，回忆(11.3.3)的条件以及由此推导出的一系列类似的条件，便可得出保证$(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$为 1Γ、21Γ、2Γ 及 2Γ 中的元合理组的条件。如在(11.3.3)中当 $P_1(\bar{s}_1,\bar{s}_2)\geqslant\max\limits_{S_1}P_1(S_1,\bar{s}_2)$时，$(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$为局中人1在 1Γ 中的元合理组。它说明对于局中人1，这里没有比$(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$更好的单边改进。(11.3.3)还说明若 s_2 能使式之左边→min 为一制裁时，$(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$是1在 21Γ 中的元合理组。而在元对策 12Γ 及 2Γ 中，元合理性条件如$\max\limits_{s_1}\min\limits_{s_2}P_1(s_1,s_2)\leqslant P_1(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$，此条件说明对于1没有有保证的改进。这表明在步骤4便得到局中人1在 2Γ 中的元合理组，类似的在第5步可得1在 21Γ 中的元合理组，在步骤6中可得1在 12Γ 和 2Γ 中的元合理组，如果通过这些步骤，仍发现有有保证的改进，那么基本方案组是不稳定的。

在上述分析中找出单边改进及制裁并非难事，但是寻求有保证的改进却可能比较困难。

下面仍以古巴导弹危机的例作说明。这里我们不妨描述得更细致一些。依当时的国际形势，双方都尽量避免核战争，因此并不希望此事不可收拾。在美方可有空袭设在古巴的导弹基地，以及实行封锁两种基本措施，它们可以组合使用，而苏联有撤出导弹与使冲突升级两种基本措施，这四种基本措施(方案)组合起来，可以有16种可能的情况，现将它们列在下面的表中，并以符号说明，规定：不采用标以“0”，采用标以“1”，此时有：

措施(方案)	结							果								
美国																
空袭	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
封锁	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
苏联																
撤出	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
升级	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
结果编号	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
美方偏好序	8	6	5	7	1	3	2	4	12	10	11	9				
苏方偏好序	1	6	4	8	2	5	3	7	12	10	11	9				

表中含义已规定如上，例如标号 6 的结果表明美方进行封锁，而苏方撤出导弹，不难看出标号为 11—15 的四个结果都是“不可行”的(或不现实、不合逻辑的)，故在以后的分析中去掉它们，这就做完了上面的步骤 1 和 2.

再把以上结果进行双方的偏好的排序，这要依赖国际形势、地位、实力、双方所获得的对方的情况以及战略思想来排定，我们把它填到表上的下方。但是为了下面的分析，再按美国与苏联分别列出。其中最左端的是局中人最偏爱的。

美 方 偏 好 序

美国	空袭	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0
	封锁	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
苏联	撤出	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	升级	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
偏好顺序		4	6	5	7	2	1	3	0	11	9	10	8

苏 方 偏 好 序

美国	空袭	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
	封锁	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
苏联	撤出	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
	升级	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
偏好顺序		0	4	6	2	5	1	7	3	11	9	10	8

列出双方偏好序后，下一步是找出双方的 UI 表。以美方为例，当考察方案表中结果 1 时，这表明美方进行空袭而苏方并不予以理睬，空袭会招致国际舆论的指责，这种情况不如改为封锁，即表中结果 2，即对美方来讲结果 1 可改进为结果 2. 若他再考察结果 6 时，即由于美方封锁而导致苏方撤出导弹，能否更进一步通过其他（如谈判等外交方式）手段而不使用封锁便迫使苏方撤出，这是结果 4，即由 6，有一个 UI 使之达到结果 4，当然，美方视结果 4 为合理的。再考察结果 5，此时美方采用空袭而迫使苏方撤出，能否采用外交手段而不使用空袭使苏方撤出而达到结果 4? 这看起来也是可能的，即存在 UI 使由 5 到 4，但注意到由 5 也可作单边改进（UI）而达到 6，而结果 6 对苏方来说可能更合理一些。因此苏方一定会采取行动来阻止美方达到 4，这就是说苏对美有一个制裁(sanction)。类似地可以检验苏方的情况，检验结果列于下表：

美国：												
全面稳定	E	E	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
局中人稳定	r	s	u	u	r	u	u	u	r	u	u	u
偏好序 UI	4	6	5	7	2	1	3	0	11	9	10	8
		4	4	4		2	2	2		11	11	11
			6	6			1	1			9	9
				5				3				10

（续表）

苏联：												
局中人稳定	r	s	r	u	r	u	r	u	u	u	u	u
偏好序 UI	0	4	6	2	5	1	7	3	11	9	10	8
		0		6		5		7	7	5	6	0
									3	1	2	4

表中所标的字母 r 表示“合理”，s 表示“制裁”，u 表示有单边改进，以上这些工作相当于算法中的 4—7 步。

由表中可见结果 1，3，8，9，10 是双方都认为有改进必要，同时也具有 UI，因而它们都是不稳定的，美方认为合理的结果有 4，2，11，另外，结果 6 虽有 UI，但却能被对方牵掣（即对方有针对此种改进之制裁），故可能仍维持在 6，而不作 UI. 同样苏方认为合理结果为 0，6，5，7，而结果 4 虽有 UI，但能被对方制裁，故仍应维持 4，从而双方同时认为合理并能保持不变者为 6，4，最后的实际结果为 6.

冲突分析是作宏观决策分析的重要方法，它有广泛应用前景与范围。读者如有兴趣，可参阅 Niall M. Fraser 及 Keith W. Hipel：Conflict Analysis，North—Holland，1984.

对策论在军事中还有许多重要应用，读者可进一步阅读有关资料与文献。

参考文献

[1] Karlin S. Mathematical Methods and Theory in Games Programming and Economics. Vol. Ⅰ，Ⅱ. Pergamon Press，1959

[2] Dresher M. The Mathematics of Games of Strategy Theory and Ap－plications. Dover Publisations New York Inc. ，1981

[3] Martin Shubik. Game Theory in Social sciences Concepts and Solu－

tions. The MIT Press, 1982
[4] Isaacs R. Differential Games. New York: Wiley, 1965
[5] Taylor J G. Differential game examination of Optimal time-sequential fire-support strategies. Nev. Res Logist. Q 25, 1978
[6] Ruckle William H. Geometric games and Their applications, Pitman Advanced Pub. Program, 1983
[7] Brams, Steven J. Superpowor games: Applying game theory to superpower conflict. New Haven: Yale Univ. Pr, 1985
[8] Niall M. Fraser & KeiTh W. Hipel. Conflict Analysis. North-Holland, 1984
[9] Thomas L C. Games, Theory and Applications. Ellis Horwood Ltd. Pub, 1984
[10] Martin Shubik. Mathematics of conflict. North—Holland, 1983
[11] 刘德铭. 用对策论的方法分析战役. 军事运筹, 1987(1)
[12] 刘德铭. 论士气. 军事运筹, 1988(1)
[13] 刘德铭. C^3I 系统中的运筹学问题. 指挥自动化研究与建设论文集, 1990
[14] 刘德铭. 对策论在军事研究中的应用. 全国最优化讨论会文集, 1991
[15] 李登峰. 军备竞赛定量微分对策模型. 军事系统工程, 1992(4)

附　录

本附录的目的是介绍与凸集有关的一些重要结果。这些结果已在本书中得到广泛的使用。我们略去几个比较困难的证明(仅指出出处)，而对其它大部分结论均作出详细的论证 。

§1　凸　集

设 X 是一个实线范线性空间，K 是 X 的一个子集。如果 K 中任何两点的连线段都含在 K 中，即

$$x,y\in K,\lambda\in[0,1]\Rightarrow \lambda x+(1-\lambda)y\in K$$

则称 K 为凸集。

显然，两个凸集的代数和是凸集，任意多个凸集的交也是凸集。

对于一个不一定凸的集合 S，所有包含 S 的凸集(如 X)的交称为 S 的凸包，记为 $\mathrm{conv}S$. 显然，$\mathrm{conv}S$ 是包含 S 的"最小"凸集，而且容易证明，$\mathrm{conv}S$ 就是 S 中元素的所有凸组合的全体，这里凸组合指的是 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i$，其中 k 是自然数，$x_1,\cdots,x_k\in S$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_k\geqslant 0$，且 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$.

关于凸集，一个最基本的事实是如下的凸集分离定理。

定理 1.1　设 K_1,K_2 是 X 中的两个不相交的闭凸集，且其中之一还是紧的。那么存在一个连续线性泛函 $f\in X^*$，实数 c 及 $\varepsilon>0$，使得

$$f(x_1)\leqslant c-\varepsilon<c\leqslant f(x_2),\qquad x_i\in K_i$$

证明见[1].

以下局限于讨论有限维欧氏空间 R^n 中的凸集。

定理 1.2 设 K_1,K_2 是 R^n 中两个不相交的凸集，则存在 $\lambda\in R^n,\lambda\neq 0$，使得 $\langle\lambda,x_1\rangle\leqslant\langle\lambda,x_2\rangle,\forall\ x_i\in K_i$.

直观上看，这个定理指的是两个不相交的凸集总可以用一个超平面将它们分隔开。

证 记 K_1 与 K_2 的代数差 K_1-K_2 为 K. 显然，K 是凸集，且 $0\in K$. 仅需证明存在 $\lambda,\lambda\neq 0$，使得

$$\langle\lambda,x\rangle\leqslant 0,\forall\ x\in k \tag{1.1}$$

再记 K 的闭包为 $\overline{K}$，$\overline{K}$ 显然也是凸集。如果 $0\overline{\in}K$，则(1.1)可由定理 1.1 直接推出(且成立严格不等式)。现假定 $0\in\overline{K}/K$，即 0 处于 K 的边界上。这时可在 $\overline{K}$ 之外取一个点列 $\{a_n\}$ 使 $a_n\to 0$. 现对每个 a_n 应用定理 1.1，得到点列 $\{\lambda_n\}$，$\lambda_n\neq 0$，它满足

$$\langle\lambda_n,x\rangle\leqslant\langle\lambda_n,a_n\rangle,\qquad \forall\ x\in K \tag{1.2}$$

此外，假定所选 λ_n 满足 $|\lambda_n|=1$. $n=1,\cdots$. 在这种情况下，存在 $\{\lambda_n\}$ 的一个收敛子列 $\lambda_{n_k}\to\lambda$. 再由(1.2)取极限，得

$$\langle\lambda,x\rangle\leqslant 0,\qquad \forall\ x\in K$$

而且 $|\lambda_n|=1$. 因此，λ 即为所求。

推论 1.3 设 x_0 是凸集 K 边界上的一点，则存在一个通过 x_0 的 K 的支撑超平面，即存在 $\lambda\in R^n,\lambda\neq 0$，使得

$$\langle\lambda,x_0\rangle\leqslant\langle\lambda,x\rangle\ ,\qquad \forall\ x\in K$$

这从定理 1.2 的证明里马上可以看出。

R^n 中有一类很重要的凸集，称为多面凸集，它可表示为 $\{x|Ax\leqslant b\}$，其中 A,b 是具有适当阶数的矩阵和向量。有界的多面凸集称为凸多面体。直观上看，凸多面体就是只有有限个"顶点"的集合。这里顶点的正式定义如下。

设 K 是凸集，$x\in K$. 称 x 为 K 的极点，如果不存在 K 中的两个点 $x^1,x^2,x^1\neq x^2$，及 $\lambda\in(0,1)$ 使得 $x=\lambda x^1+(1-\lambda)x^2$.

定理 1.4 如果 x_0 是多面凸集

$$P=\{x \mid \langle a_i,x\rangle \leqslant b_i, i=1,2,\cdots,m\}$$

的极点，则 x_0 必为某方程组

$$\langle a_i,x\rangle=b_i,\qquad i\in M_0 \tag{1.3}$$

的唯一解，其中 M_0 是 $M=\{1,2,\cdots,m\}$的一个子集，可能与 x_0 有关。

证 不妨设 x_0 满足

$$\langle a_i,x_0\rangle=b_i \qquad i=1,2,\cdots,p$$
$$\langle a_i,x_0\rangle<b_i \qquad i=P+1,\cdots,m$$

取 $M_0=\{1,2,\cdots,p\}$，仅需说明与(1.3)相对应的齐次线性方程组只有零解。实际上，如果这个齐次线性方程组有非零解 α，则对于任意实数 t，$x=x_0\pm t\alpha$ 满足(1.3)，且对充分小的 t，仍有

$$\langle a_i,x\rangle<b_i \qquad i=p+1,\cdots,m$$

因此，对于这样的 t，$x_0\pm t\alpha\in P$. 再注意到

$$x_0=\frac{1}{2}(x_0+t\alpha)+\frac{1}{2}(x_0-t\alpha)$$

所以 x_0 不是 P 的极点，与假设矛盾。

因为形如(1.2)的方程组只有有限个，所以从定理 1.4 马上推得，任何多面凸集都只有有限个极点 。

定理 1.5(凸集表示定理) 设 K 是 R^n 中的一个有界闭凸集，S 是 K 的极点之全体，则 $K=\mathrm{conv}S$.

证 对 n 采用归纳法。如果 $n=1$，则有界闭凸集 K 就是闭区间$[a,b]$，极点就是两个端点，此时结论显然成立。

假定结论对于 R^{n-1}中的凸集是对的。显然，它对于 R^n 中的任一 $n-1$ 维凸集(即含在某超平面内的凸集)也成立。现假定 K 是 R^n 中的凸集，$x\in K$，下面证明 x 可表示为 S 中若干元素的凸组合。

任取 K 的一个极点 $y'\in S$，考虑 x 与 y' 的连线 l，它与紧凸集 K 的边界必有一个交点 y''，$y''\neq y'$. 显见，$y''\in K$，且 x 是 y' 与

y^* 的凸组合。下面说明 y^* 是 S 中若干元素的凸组合就够了。

由于 y^* 处于 K 的边界，故由推论 1.3，存在一个通过 y^* 的 K 的支撑超平面 $H=\{x|\langle p,x\rangle=\alpha\}$，即存在向量 $p\neq0$ 及实数 α，使得

$$\langle p,y^*\rangle=\alpha \tag{1.4}$$

$$\langle p,x\rangle\leqslant\alpha,\quad \forall\ x\in K \tag{1.5}$$

现在考虑紧凸集 $K\cap H$. 根据归纳假设，y^* 是 $H\cap K$ 的若干极点的凸组合。

设 $y\in H\cap K$，且 $y=\lambda y_1+(1-\lambda)y_2$，其中 $\lambda\in(0,1)$，$y_1,y_2\in K$。由 H 的定义和(1.5)，

$$\begin{aligned}\alpha&=p,y\rangle=\lambda\langle p,y_1\rangle+(1-\lambda)\langle p,y_2\rangle\\&\leqslant\lambda\alpha+(1-\lambda)\alpha=\alpha,\end{aligned}$$

所以，$\langle p,y_i\rangle=\alpha$，$i=1,2$，即 $y_1,y_2\in H$. 这意味着 $H\cap K$ 的任一极点必为 K 的极点。因此，y^* 是 K 的若干极点的凸组合。

§2 凸函数

设 $K\subset R^n$ 是一个凸集，$f:K\to R$ 是 K 上的一个实函数。如果 $\forall\ x,y\in K$ 及 $\lambda\in[0,1]$，

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

则称 f 是凸的。

易知，函数 $f:K\to R$ 是凸的当且仅当 f 的上图

$$E(f)=\{(x,y)\in R^{n+1}|x\in K,y\in R,y\geqslant f(x)\}$$

是凸集。如果 $\{f_\alpha\}$ 是一组凸函数，则 $f(x)=\sup\limits_\alpha f_\alpha(x)$ 在其定义域上也是凸的，因为 $E(f)=\bigcap\limits_\alpha E(f_\alpha)$ 是凸集。

定理 2.1 设 f 是定义在开凸集 C 上的二次连续可微函数，则下面三个条件等价：

i) f 是凸的；

ii) $\forall\ x,y\in C, f(y)\leqslant f(x)+\langle\nabla f(x), y-x\rangle$;

iii) f 的 Hessian 矩阵$(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$在 C 上恒半正定。

证 f 是 C 上的凸函数当且仅当 f 限制在 C 的每一线段上都是凸的。这又等价于对于任一 $y\in C, Z\in R^n, g(t)=f(y+tZ)$是实区间$\{t\mid y+tZ\in C\}$上的凸函数。因此，定理可从一维情形的相应结论直接推出。

§3 不动点定理

定理 3.1(Knaster—Kuratowski—Mazurkiewicz) 设 A 是 R^n 中的单位单纯形，即

$$A=\mathrm{conv}\{e^i\mid i\in N\}$$

其中 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，e^i 是 R^n 的第 i 个单位向量。再设$\{C^i\mid i\in N\}$是 A 中的一组闭子集，满足

$$\bigcup_{i\in S}C^i\supset A^S,\qquad \forall\ S\subset N \tag{3.1}$$

其中 $A^S=\mathrm{conv}\{e^i\mid i\in S\}$。那么，$\bigcap_{i=1}^{n}C^i\neq\varnothing$。

这个定理可用组合论中著名而又初等的 Sperner 引理来证明，见[2]。

定理 3.2(Brouwer 不动点定理) 设 S 为 R^n 中的一个紧凸集，f 是一个从 S 到 S 的连续映射。那么存在 $x\in S$，使得 $f(x)=x$。

证 为了用 K—K—M 定理来证明本定理，不妨设 S 是单位单纯形，即 $S=A$。对于一般的情形，可以通过一个一一的连续变换将 S 变成 A。

在 A 上作一组集合$\{C^i\}_{i\in N}$：

$$C^i=\{x\mid x_i\geqslant f_i(x)\}$$

由 f 的连续性知 C^i 是闭的。现设 $x\in A^S$，即

$$x_i=0, \forall i \overline{\in} S; x_i \geqslant 0, \forall i \in S, \text{且} \sum_{i \in S} x_i = 1$$

如果 $x \overline{\in} \bigcup_{i \in S} C^i$，则

$$x_i < f_i(x), \qquad i \in S$$

对 $i \in S$ 作和，并注意 $f(x) \in A$，得

$$1 = \sum_{i \in S} x_i < \sum_{i \in S} f_i(x) \leqslant \sum_{i \in N} f_i(x)$$

这与 $f(x) \in A$ 矛盾。因此，$\{C^i\}$满足(3.1).

应用 $K-K-M$ 定理知 $\bigcap_{i \in N} C^i \varnothing$，即存在 $x^0 \in A$，满足

$$x_i^0 \geqslant f_i(x^0), i \in N \tag{3.2}$$

上式两端对 $i \in N$ 作和，并注意 $f(x^0) \in A$，得

$$1 = \sum_{i \in N} x_i^0 \geqslant \sum_{i \in N} f_i(x^0) = 1$$

因此，(3.2)的所有等号成立，即 $x^0 = f(x^0)$。证毕。

Brouwer 不动点定理还有其它一些比较初等的证明方法，可参阅[2].

在对策论和数理经济学中，Brouwer 不动点定理还常常不够用，尚需将它推广成更为一般的不动点定理——Kakutani 不动点定理。

设 $S \subset R^n$，f 是定义在 S 上的集值映射(correspondence)，即对每一 $x \in S$，$f(x)$是 R^n 的一个非空子集。称 f 在 $x_0 \in S$ 处上半连续，如果对于任何点列$\{x_n\}$，$\{y_n\} \subset R^n$，由 $x_n \to x_0$，$y_n \to y_0$ 及 $y_n \in f(x_n)$，$n=1,2,\cdots$可推得 $y_0 \in f(x_0)$。如果 f 在 S 的任何一点都上半连续，则称 f 在 S 上上半连续，显然，f 的上半连续性等价于 f 的图象$\{(x,y) \in R^{2n} | x \in S, y \in f(x)\}$是 R^{2n}中的闭集(简称 f 是闭的)。对于一般的单值函数，如将其看成集值映射，则上半连续性就是普通的连续性。

定理 3.3 设 S 是 R^n 中的一个紧凸集，f 是定义在 S 上的上半连续集值映射，且对于每一 $x \in S$，$f(x)$是 S 的闭凸子集。那么，

存在 $x\in S$ 使得 $x\in f(x)$.

证明见[2].

§4 Lyapunov 定理

定理 4.1 (Lyapunov) 设 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是某可测空间$(\Omega,\mathscr{A})$上的一组缺原子测度，$\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_n)$，则 $\mu(\mathscr{A})=\{\mu(A)|A\in\mathscr{A}\}$是 R^n 中的紧凸集。

跟不动点定理一样，这个定理的证明也比较困难。文[3]提出了一种简短但稍为高深的证明。

参考文献

[1] Dunford N, Schwartz. J T. Lineat Operators, Part I. New York: Interscience, 1958

[2] Franklin J. Methods of Mathematical Economics. New York: Springer—Verlag, 1980

[3] Lindenstrauss J. A short proof of Liapounoff's convexity theorem. J. Math. and Mech., 1966(15): 971—972

[4] Rockafeller R T. Convex Analysis. Princeton University Press, 1972